UNIVERSIDAD PRIVADA NORBERT WIENER

Escuela de Posgrado

Tesis

USO DEL CALENDARIO MATEMÁTICO COMO MATERIAL DIDÁCTICO PARA FORTALECER LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EN ESTUDIANTES DE CUARTO GRADO DE PRIMARIA DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA REINA DE LA PAZ, FLORIDABLANCA, SANTANDER, 2018.

Tesis para optar el grado académico de:

MAESTRO EN EDUCACIÓN CON MENCIÓN EN PEDAGOGÍA

Presentado por:

Br. CLAUDIA JOHANNA TRISTANCHO ARGUELLO

Br. LUZ GENNY TRISTANCHO ARGUELLO

Lima – Perú

2019

USO DEL CALENDARIO MATEMÁTICO COMO MATERIAL DIDÁCTICO PARA FORTALECER LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EN ESTUDIANTES DE CUARTO GRADO DE PRIMARIA DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA REINA DE LA PAZ (FLORIDABLANCA, SANTANDER).

Asesora:

Dra. Valia Luz Venegas Mejía

Dedicatoria

A nuestra familia quienes han sido el pilar de nuestras vidas.

A las personas que nos colaboraron en el trabajo de campo, dedicando su tiempo para apoyarnos.

A la Institución Educativa Reina de la Paz que nos abrió espacio para la realización de la investigación; a los estudiantes y padres de familia del grado cuarto quienes estuvieron dispuestos a participar en todas las actividades planteadas.

Agradecimientos

A Dios por ser nuestro soporte espiritual y nuestro guía; por darnos salud y bendición para alcanzar nuestras.

A nuestros padres, por su apoyo incondicional.

Al profesor Daniel Moreno Caicedo, director de *Matemática Recreativa* del Grupo de Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander, por su valiosa colaboración al brindarnos información sobre el Calendario Matemático y por motivarnos a usar este material didáctico en la formación de nuestros estudiantes.

A todas las personas que nos brindaron su apoyo y aportes en el desarrollo de esta investigación.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

Pág

LISTA DE LAS FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

Los resultados de una evaluación interna colombiana, Prueba Saber, dan cuenta de los avances y dificultades que tienen los estudiantes de la Institución Educativa Reina de la Paz en las diferentes competencias y componentes matemáticos; dichos resultados permiten diseñar alternativas de mejoramiento en la asignatura de matemáticas, específicamente en la resolución de problemas geométricos donde han reincidido las dificultades de los estudiantes. Debido a esto, se implementó el uso del Calendario Matemático con el enfoque de resolución de problemas del proyecto colombiano *Colombia Aprendiendo,* esto con el objetivo determinar la medida en que el uso del Calendario Matemático (CalMat) como material didáctico fortalece la resolución de problemas geométricos en estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de la Paz (Floridablanca, Santander).

La investigación cuantitativa de tipo experimental con alcance explicativo mide y explica el efecto de dos tratamientos (tradicional y CalMat) sobre el aprendizaje de la geometría. El diseño experimental se ajustó a las cualidades de un experimento puro compuesto por una estructura de tratamiento en una vía y una estructura de diseño completamente aleatorizada. El número de réplicas empleadas por tratamiento bajo los parámetros: error tipo 1 ($\alpha = 0{,}5$), sensibilidad del test de contraste de hipótesis $(1 - \beta) = 0{,}9$, diferencia significativa entre puntuaciones $\delta = 15$ y desviación estándar $\sigma = 12$ fue aproximadamente de 10.

Después de analizar los datos recolectados por medio de ANOVA paramétrico y ANOVA no paramétrico se aceptó la hipótesis general bajo un nivel de significación de 0,05 que equivale a afirmar que “El uso del Calendario Matemático como material didáctico fortalece la resolución de problemas geométricos en los estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de la Paz de Floridablanca, Santander, en el 2018.”

PALABRAS CLAVE: Resolución de problemas, calendario matemático, Geometría.

ABSTRACT

The results of a colombian internal evaluation, Prueba Saber, show the advances and difficulties that the students of the Reina de la Paz School have in the different competences and mathematical components; these results allow to design improvement alternatives in the mathematics subject, specifically in the resolution of geometric problems where the difficulties in fifth grade students have reoccurred. Due to this, the use of the Mathematical Calendar with the problem solving approach of the colombian project *Colombia Aprendiendo* was implemented, this with the objective to determine the extent to which the use of the *Calendario Matemático* (CalMat) as didactic material strengthens the resolution of geometric problems in fourth grade students of the educational institution Reina de la Paz (Floridablanca, Santander).

The experimental quantitative research with explanatory scope measures and explains the effect of two treatments (traditional and CalMat) on the learning of geometry. The experimental design was adjusted to the qualities of a pure experiment consisting of a one-way treatment structure and a completely randomized design structure. The number of replicas used per treatment under the parameters: error type 1 ($\alpha = 0{,}5$), sensitivity of the hypothesis test $(1\text{-}\beta) = 0{,}9$, significant difference between scores $\delta = 15$ and standard deviation $\sigma = 12$ was approximately 10.

After analyzing the data collected by means of Parametric ANOVA and Non-parametric ANOVA, the general hypothesis is accepted under a significance level of 0.05: "The use of the Mathematical Calendar as teaching material strengthens the resolution of geometric problems in fourth grade students of primary the educational institution Reina de la Paz of Floridablanca, Santander, in 2018”.

KEYWORDS: Problem solving, mathematical calendar, Geometry

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas ha sido un tema fundamental en la investigación en educación (y educación matemática), en los programas de formación para profesores y en los currículos desde que Polya, matemático preocupado por la enseñanza de esta disciplina que a través de su libro *Como resolver y plantear problemas* (1945), trató de aportar en los razonamientos implicados en la resolución de problemas. Es ampliamente aceptado por la comunidad de investigadores de educación matemática que el trabajo con problemas permite a los estudiantes construir conocimiento más significativo, aspecto que resaltaba Polya.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia, mediante los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (MEN, 2006), intenta orientar a los profesores de matemáticas en su comprensión e implementación en las aulas de clase desde los primeros años de escolaridad siendo la base fundamental del desarrollo del pensamiento del ser humano.

No obstante, este proceso ha sido lento y, desde pruebas estandarizadas nacionales (prueba Saber) e internacionales como las del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) o del Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS), se evidencia que es un trabajo que requiere de constancia y continuidad para proyectar mejores resultados.

Considerando los resultados de las pruebas Saber de la institución educativa Reina de la Paz, de 2016 y 2017 del grado quinto de primaria, se pudo constatar que una dificultad presente en la mayoría de los estudiantes es la resolución de problemas geométricos. Como estrategia para abordar esta problemática se planteó el uso del *Calendario Matemático* durante las clases de geometría, recurso didáctico enfocado en la resolución de problemas en todos los pensamientos matemáticos tales como: pensamiento numérico, variacional, métrico, espacial y aleatorio (MEN, 1998).

Para alcanzar el objetivo de la investigación se propuso determinar en qué medida el uso del Calendario Matemático, mediante la metodología de resolución de problemas, favorece la solución de situaciones geométricos-métricos teniendo en cuenta los diferentes niveles de cada ejercicio aplicado a estudiantes de cuarto grado de primaria de la institución Reina de la Paz, lo que condujo a adoptar las voces de Polya (1985), Schoenfeld (1982) y Santos-Trigo (2007) en relación a la resolución de problemas, así como las orientaciones de los Estándares de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) en relación al desarrollo del componente geométrico.

Se empleó una metodología de investigación experimental en donde se contó con dos grupos; el grupo experimental al cual se le aplicó "clase bajo el enfoque resolución de problemas mediado por el Calendario Matemático" y el grupo control al cual se le aplicó "clase magistral tradicional".

Para la recolección de la información se realizó un pretest (antes del desarrollo del experimento) verificando la homogeneidad entre las unidades experimentales (estudiantes) y los grupos y un pos-test (después del desarrollo del experimento) comparando el efecto de las metodologías. La información obtenida del diseño experimental se analizó haciendo uso de estadísticas descriptivas (tablas, gráficos, medidas de tendencia central y dispersión) y estadística inferencial del análisis de varianza (ANOVA paramétrico, ANOVA no paramétrico, Prueba chi-cuadrado para dependencia de variables, Tablas de Contingencia.)

Finalmente, esta investigación se compone de cinco capítulos, el cual se estructura de la siguiente manera: en el *capítulo uno* se presenta una descripción general del problema de estudio y se dan a conocer algunos antecedentes de la investigación relacionados con el problema planteado. El *capítulo dos* contiene las bases teóricas y conceptuales de la investigación. El *capítulo tres* se expone el proceso metodológico y el enfoque cuantitativo que se aplicó en la investigación. El *capítulo cuatro* presenta el análisis y los resultados de la investigación y el *capítulo cinco* expresa las conclusiones y recomendaciones del estudio, además de las referencias bibliográficas y anexos.

Capítulo 1
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.Descripción de la realidad problemática

La Geometría es una de las ramas de las Matemáticas con una historia muy rica que se remonta a las comunidades más primitivas deseosas de representar el mundo que los rodeaba, decorar sus pertenencias con diseños que resaltaban las simetrías y regularidades de las formas.

Después, civilizaciones como la china, india, egipcia, griega, maya y azteca la usaron para resolver problemas prácticos como la medición de longitudes, áreas y volúmenes, o el trazo de linderos en la tierra. Posteriormente, señalan Camargo y Acosta (2012) que la geometría juega un rol instrumental para el desarrollo de la arquitectura, la geografía y la astronomía y que, además, a partir de los griegos, “la geometría avanza hacia la constitución de una disciplina científica, por el interés de fundamentar teórica y deductivamente el conocimiento geométrico” (Camargo y Acosta, 2012, p. 4).

El panorama antes mencionado, resalta que la geometría es una de las ramas de la matemática que debe ocupar un lugar privilegiado en los currículos escolares, debido a su aporte a la formación del individuo, desde sus diferentes dimensiones. Sin embargo, Gamboa y Ballesteros (2010) afirman que “autores como Abrate, Delgado y Pochulu (2006) señalan que algunos docentes priorizan la enseñanza de las matemáticas en otras áreas y van desplazando los contenidos de geometría hacia el final del curso, lo que les implica, en variados casos, la exclusión” (p. 127).

En Colombia, por ejemplo, esta situación se ha evidenciado en evaluaciones externas como las del Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por sus siglas en inglés), proyecto de investigación y evaluación curricular en la enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias Naturales, en la Educación Básica en diferentes países. Por ejemplo, el análisis de los resultados del tercer estudio, reflejó que la medición es una de las áreas de mayor dificultad, o la menos conocida de las demás áreas temáticas en Colombia (Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia (Seduca), 2006).

En relación a evaluaciones internas que evidencien la problemática alrededor de la geometría (tanto en su enseñanza como aprendizaje), se tiene la prueba Saber realizada por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) de manera periódica en los distintos ciclos del sistema educativo con el objetivo de contribuir a mejorar la calidad de la educación en Colombia. En educación primaria, la prueba Saber se aplica en tres grados: tercero (desde 2012), quinto y noveno de todos los establecimientos educativos (oficiales, privados, urbanos y rurales); esta evaluación se enfoca en las competencias básicas que han desarrollado los estudiantes en las áreas de: Lenguaje y Matemáticas.

La prueba no mide cuánto saben los estudiantes en cada área sino cómo el estudiante aplica los conocimientos adquiridos (ICFES, 2014), es decir, evalúa competencias y lo hace mediante preguntas de selección múltiple que están alineadas con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas establecidos por el MEN.

Para matemáticas, la prueba Saber evalúa tres competencias: razonamiento-argumentación (R-A), comunicación-representación-modelación (C-R-M) y planteamiento-resolución de problemas (P-RdP); además, de tres componentes: numérico-variacional (N-V), geométrico-métrico (G-M) y aleatorio (AL), utilizando las convenciones *fuerte*, *muy fuerte, similar*, *débil* y *muy débil* para señalar debilidades y fortalezas.

En particular, en la Institución Educativa Reina de la Paz del municipio de Floridablanca (Santander, Colombia), los resultados de la prueba Saber de 2016 y 2017 evidenciaron que los estudiantes de quinto grado (10 u 11 años de edad, aproximadamente) presentan dificultades reincidentes en la resolución de problemas geométricos ya que, por un lado, en ambas pruebas el componente G-M fue evaluado como *débil* y, por el otro, P-RdP como *muy débil y débil*.

A partir de los resultados de la prueba Saber, los cuales representan un insumo importante para la formulación de planes de mejoramiento y actividades pedagógicas que tengan en cuenta las debilidades y fortalezas de los estudiantes para mejorar su desempeño académico (MEN, 2016), todas las instituciones educativas deben, según directriz del MEN, proponer estrategias de mejoramiento, que si no son tenidos en cuenta en la planeación de clase y el docente no asume su rol de facilitador de conocimientos los estudiantes se formarían solamente en aprendizajes memorísticos de conceptos, fórmulas y teoremas lo que con el paso del tiempo tienden a desaparecer del pensamiento de los alumnos, ocasionando bloqueos en los conocimientos y rechazo en los nuevos aprendizajes.

Al realizar un análisis del quehacer pedagógico alrededor de la geometría de la institución educativa Reina de la Paz, podríamos inferir que estos resultados obedecen, de alguna forma, a los traspiés que ha tenido la incorporación de la enseñanza de la geometría. Por un lado, la metodología de enseñanza y aprendizaje de la geometría se ha caracterizado por la exposición de conceptos, ejemplificaciones y ejercitación de procedimientos siguiendo el texto guía de matemáticas. Por otro lado, la intensidad horaria que se ha asignado a la asignatura de Matemáticas (cinco horas semanales).

Durante los últimos cuatro años, en la institución educativa se han dado algunas variaciones en la cátedra de Geometría: inicialmente, se orientaba la última semana de cada periodo escolar; luego, se impartía durante el primer semestre dentro de la misma asignatura de matemáticas, lo que conllevaba a que los profesores, por distintas razones, no abrieran el espacio para su enseñanza ya sea porque se daba mayor relevancia a las temáticas de Aritmética o por actividades extracurriculares. Finalmente, a partir de tercer grado de primaria, se separó Geometría de la asignatura de matemáticas, para ello se asignó un profesor para cada cátedra, y geometría tuvo, de esta manera, una hora asignada dentro de los horarios de clase y con un porcentaje del 30% en la dimensión procedimental en la evaluación de la asignatura de matemáticas, este porcentaje se estableció en común acuerdo entre los docentes del área y gestión académica para darle importancia a la materia.

Otro factor que hemos analizado desde nuestra experiencia laboral (y que está relacionado con lo metodológico), es que los profesores comprendemos de manera reducida lo que señala el MEN, pues algunos creemos que la resolución de problemas es una de las habilidades que deben enseñarse al final del currículum (Kilpatrick, 1985, citado por Santos-Trigo, 2007). Podríamos decir que uno de los factores que conlleva a que los estudiantes tengan dificultades para resolver problemas es que dejamos de lado el enfoque metodológico que le corresponde, incurriendo en la cátedra tradicional donde se plantea primero la conceptualización del tema, se explica y finalmente se propone una situación problema que desliga la actividad matemática ya que el estudiante no descubre la estructura conceptual adecuada.

La resolución de problemas debe verse como un arte en el sentido de parecer la actividad matemática que realizan los matemáticos dentro del salón de clases (Schoenfeld, 1985, citado por Santos-Trigo, 2007) quizás, desde esta perspectiva, es que debe interpretarse lo que señala el MEN (1998) en relación al "planteamiento y la resolución de problemas".

Estos factores, además de los resultados en las pruebas Saber, han generado una gran preocupación en los profesores de matemáticas de la institución, lo que nos condujo a plantear una propuesta que permita subsanar algunas falencias mencionadas que, de lo contrario, podrían consolidar las dificultades en el aprendizaje de la Geometría, aspecto que es poco coherente con el papel que ella desempeña tanto en la historia de la humanidad como en la vida cotidiana.

Mediante esta investigación, quisimos aportar estrategias a las dificultades en la resolución de problemas geométricos-métricos de los estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de la Paz (Floridablanca, Santander) al implementar en la clase de Geometría un material didáctico llamado "Calendario Matemático", que tiene por objetivo "contribuir a desarrollar el Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas a través del trabajo de un problema cada día" (Colombia Aprendiendo, 1997-2018, párr. 1), aspecto que está asociado al trabajo de un matemático quien está resolviendo problemas constantemente.

1.2 Identificación y formulación del problema de investigación

1.2.1 Problema general

¿En qué medida el uso del Calendario Matemático como material didáctico fortalece la resolución de problemas geométricos en estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de la Paz (Floridablanca, Santander) en el 2018?

1.2.2 Problemas específicos

a) ¿En qué medida el uso del Calendario Matemático como material didáctico, fortalece la resolución de problemas en situaciones geométricas de tipo 1 en estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de la Paz?

b) ¿En qué medida el uso del Calendario Matemático como material didáctico, fortalece la resolución de problemas en situaciones geométricas de tipo 2 en estudiantes de cuarto grado de primaria de la la Institución Educativa Reina de la Paz?

c) ¿En qué medida el uso del Calendario Matemático como material didáctico, fortalece la resolución de problemas en situaciones geométricas de tipo 3 en estudiantes de cuarto grado de primaria de la la Institución Educativa Reina de la Paz?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Determinar la medida en que el uso del Calendario Matemático como material didáctico fortalece la resolución de problemas geométricos en estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de la Paz (Floridablanca, Santander) en el 2018.

1.3.2 Objetivos específicos

a) Determinar en qué medida el uso del Calendario Matemático como material didáctico, mediante el enfoque de resolución de problema, incide positivamente en la solución de problemas geométricos de tipo 1 en estudiantes de cuarto grado de primaria de la institución educativa Reina de la Paz.
b) Determinar en qué medida el uso del Calendario Matemático como material didáctico, mediante el enfoque de resolución de problema, incide positivamente en la solución de problemas geométricos de tipo 2 en estudiantes de cuarto grado de primaria de la institución educativa Reina de la Paz.
c) Determinar en qué medida el uso del Calendario Matemático como material didáctico, mediante la metodología de resolución de problema, incide positivamente en la solución de problemas geométricos de tipo 3 en estudiantes de cuarto grado de primaria de la institución educativa Reina de la Paz.

1.4 Justificación de la Investigación

El planteamiento y la resolución de problemas es uno de los cinco procesos generales de la actividad matemática en el currículo de matemáticas colombiano, el cual, según el MEN (2006), podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, ya que este permite "desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas".

Mediante este estudio, buscamos aportar a la investigación sobre la resolución de problemas, en particular, a las estrategias que la favorecen ya que, aunque el MEN ha convocado y orientado a los profesores de matemáticas sobre este tema, aún persisten las dificultades sobre su entendimiento y puesta en marcha, aspecto que se ve reflejado en las dificultades para resolver problemas matemáticos de estudiantes de distinto nivel educativo (Rico, 1995; Díaz, 2009, Barajas, 2015; y OCDE, 2016).

Para ello, documentamos la incidencia del uso del *Calendario Matemático*, material didáctico bandera del proyecto *Colombia Aprendiendo* que busca contribuir al desarrollo del enfoque de planteamiento y resolución de problemas. El aporte va en el sentido de dar cuenta que el Calendario Matemático (CalMat, de aquí en adelante), efectivamente, fortalece a la resolución de problemas.

El estudio se centró, de manera específica, en relación a la resolución de los problemas geométricos propuestos en el CalMat, esto a raíz de la debilidad emergente en la Prueba Saber, aplicadas en los años 2016 y 2017, que realizan los estudiantes de grado quinto de primaria de la institución educativa Reina de la Paz. Precisamos que este estudio se desarrolló con los estudiantes de cuarto grado de primaria ya que, por un lado, las dificultades las evidenciaron los de quinto grado de primaria en una prueba que realizan a mediados del año escolar lo cual indica que un porcentaje significativo de los saberes evaluados corresponden al grado anterior y, por otro lado, serán ellos quienes presentarán la prueba en el año 2019.

De manera que, esperamos obtener resultados que den cuenta, a los profesores de matemáticas de la institución educativa Reina de la Paz, de nuestra región y del país, de las posibilidades pedagógicas y disciplinares de este recurso, lo cual evidencia la relevancia de esta investigación desde el punto de vista pedagógico y didáctico.

1.5 Limitaciones de la investigación

Esta investigación podría presentar las siguientes limitaciones:

a) Considerar al grado cuarto como único grupo para el trabajo de campo. Al realizar la investigación, se dividió el grupo de 21 estudiantes, en dos: grupo control (GC) y el grupo experimental (GE).
b) Demandar tiempo adicional a lo esperado referido al trabajo de campo. Esta limitación se manejó al usar la hora de clase semanal de Geometría exclusivamente para el trabajo con el Calendario Matemático durante 15 semanas.
c) La percepción inadecuada del entorno ya que algunos padres de familia o profesores podrían consideran que llevar al aula de clase actividades como el Calendario Matemático es: (a) una manera de "quemar tiempo", (b) de entretener al estudiante cuando el profesor no planea su

clase. La limitación (a) se subsanó cuando los estudiantes se entusiasmaron al percibirse capaces de solucionar problemas en un ambiente que respeta su errores, valora su participación y los conduce a nuevos aprendizajes; la (b) se manejó realizando el debido seguimiento y registro de las actividades, lo cual evidenció que el trabajo con el CalMat no fue improvisado pues se ciñó a un objetivo importante y transversal al área de Matemáticas: aportar a desarrollar el enfoque de planteamiento y resolución de problemas.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes de la investigación

Antes de hablar de la resolución de problemas (RdP, en adelante) desde las dificultades, consideramos importante señalar que los antecedentes más significativos en relación a la resolución de problemas están dados por los trabajos de Polya y Schoenfeld (MEN, 1998).

Polya (1975), vale precisar, no realizó investigación de campo con estudiantes propiamente, sino una síntesis de ideas sobre “la importancia de resolver problemas como medio de crear conocimiento en matemáticas y sus posibilidades en el aprendizaje de esta disciplina” (Barrantes, 2006, p. 1). Alfaro (2006) señala que su trabajo se caracterizó por “cuestionar las estrategias que existían para resolver problemas o cómo se concebiría una sucesión de pasos lógicos para aplicar a la resolución de cualquier tipo de problema” (p. 2).

Schoenfeld (1982), por su parte, realiza experiencias con profesores y estudiantes; observó su actuación en parejas, grababa y tomaba apuntes sobre lo que ocurría durante la resolución de problemas.

> Al final de todos estos experimentos, Schoenfeld llegó a la conclusión de que cuando se tiene o se quiere trabajar con resolución de problemas como una estrategia didáctica hay que tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas; de lo contrario no

funciona, no tanto porque las heurísticas no sirvan, sino porque hay que tomar en cuenta otros factores. (Barrantes, 2016, p.2)

De esto último, inferimos que no son, entonces, una sorpresa las dificultades en la resolución de problemas matemáticos.

En nuestra búsqueda, encontramos otras y variadas líneas de investigación asociada a la RdP, las cuales dan cuenta de lo amplia y compleja que es esta línea en el ámbito de la educación. Entre ellas están:

a. La resolución de problemas como estrategia de enseñanza tanto en el área de matemática como en las ingenierías (Calvo, 2008; Araujo, 2002 y Gutiérrez, 2012).
b. Estrategias empleadas por los estudiantes en la RdP algebraicos, aritméticos o variacionales (Palomares y Hernández, 2005; Llanos, 2008; Silva, 2009 y López, 2014).
c. Integración de la Tecnología y la RdP (Contreras, 2005 y Aguilar, 2014).
d. Concepciones de los profesores de matemáticas (profesionales o en formación) sobre la resolución de problemas (Contreras y Carrillo, 1996; Cortés y Sanabria, 2012; Bedoya y Ospina, 2014; López, Aldana y Erazo, 2018).
e. Concepciones de los estudiantes sobre la RdP (Callejo y Vila, 2003).

Cabe señalar que se consideran como antecedentes estudios sobre resolución de problemas matemáticos en ingenierías ya que ellos destacan que la problemática impacta a todos los niveles de educación, por ello la importancia de aportar soluciones desde la básica primaria. De otra parte, precisamos que los hallazgos relacionados con las dificultades en RdP geométricos a nivel de primaria (ya sea reportándolas o presentando propuestas didácticas que contribuyan a mitigar la problemática) son pocos; al parecer, la problemática no ha sido documentada significativamente en este nivel. Presentamos, a continuación, nuestros hallazgos, los cuales se diferencian en los ámbitos internacional y nacional:

2.1.1 Ámbito internacional

Sánchez (2001), con una mirada amplia, realiza un análisis retrospectivo sobre su contexto escolar para reportar algunos factores que conducen a que sus estudiantes de primaria tengan dificultades para resolver problemas, entre los que encuentra: la enseñanza privilegiada por la mecanización de algoritmos, el uso de la resolución de problemas para el final de los temas, el uso (y abuso) del libro de texto como material que orienta el proceso de enseñanza y aprendizaje de matemáticas y el tipo de problemas que se presentan en clase. Respecto a este último, Sánchez (2001) enfatiza que "(…) se deben presentar problemas que implique la reflexión sobre los datos, enseñarles a justificar y validar los resultados obtenidos; a que exploren vías de solución empleando diversos procedimientos" (p.142).

Astola, Salvador y Vera (2012), reflexionando sobre las evaluaciones nacionales e internacionales, señalan que los estudiantes de primaria tienen falencias en el aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas. Los autores ponen en marcha un programa de desarrollo de niveles de logro en la resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos denominado "GPA-RESOL" con estudiantes peruanos de segundo grado de primaria; "el programa forma parte de la Estructura Curricular Nacional explícitamente desde 1999 y se enfoca en el desarrollo de las capacidades del individuo que le permitirán resolver problemas, construir razonamientos válidos y comunicar información mediante el uso de conceptos y términos matemáticos” (Astola, Salvador y Vera, 2012, p.4).

Dicho programa fue aplicado en dos instituciones educativas (una de gestión pública y otra privada), a un total de 94 estudiantes. En la investigación, de tipo experimental, se concluye que el nivel de logro, tras la implementación, es altamente significativa en el colegio privado ya que en el público el tiempo fue una variable en contra; esto mediante un análisis inferencial con las pruebas t-student y comparaciones múltiples con el Alfa de Bonferroni.

Nuevamente, los bajos resultados de estudiantes de segundo grado de primaria, en pruebas estandarizadas de matemáticas peruanas, fueron la motivación para Fabián (2013) quien diseña un módulo para mejorar las capacidades específicas que utiliza el estudiante en la resolución de problemas matemáticos; tales capacidades son: analizar el problema, identificar y plantear estrategias; aplicar algoritmos y revisar el proceso de resolución. Tras la aplicación del módulo, Fabián (2013) afirma que hubo un aumento significativo en la capacidad de resolución de problemas al realizar un comparativo entre las medias (coeficiente alfa de Cronbach) de la pre-prueba y post-prueba de 30 estudiantes.

Díaz y Díaz (2018) reportan, de manera general y sin precisar, algunas dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de resolución de problemas: (i) dificultades en la comprensión de los problemas que no permiten una adecuada búsqueda de la vía de solución; (ii) incoherencias en las respuestas a los problemas y bloqueos en el proceso de búsqueda de la vía de solución; (iii) inhibición en la búsqueda de la vía de solución a ciertos problemas como resultado del efecto negativo de experiencias anteriores; (iv) escasa autorregulación de los procesos mentales por los estudiantes en la resolución de problemas.

Las anteriores investigaciones son útiles como referentes para este estudio ya que (1) resaltan la importancia de incluir en la clase de matemáticas problemas que contribuyan a adquirir nuevas formas de pensar, a desarrollar la metacognición y a construir, de ser posible, nuevos conocimientos; y (2) destacan que, ante las dificultades reportadas tanto mediante pruebas estandarizadas como por estudios situados, la implementación de programas o estrategias que superen lo tradicional es una oportunidad para oxigenar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y, en particular, para potenciar el pensamiento matemático de los estudiantes.

2.1.2 Ámbito nacional

Los investigadores Guerrero y Rey (2013) reportan las dificultades y los errores que presentan los estudiantes universitarios de segundo semestre al realizar diferentes problemas multiplicativos, a saber: identifica las operaciones que se encuentran en los problemas y al momento de resolverlo no encuentra la respuesta correcta, teniendo falla en la aplicación del algoritmo utilizado; e identifica las representaciones que se utilizan para resolver el problema pero al momento de hallar la solución, se le dificulta encontrar las respuesta.

Barajas (2015) caracteriza algunas de las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando resuelven problemas que implican fenómenos de variación, esto a partir del análisis de los procedimientos emergentes de la RdP de una prueba diagnóstica inicial de un curso de precálculo, en el cual participan estudiantes de nuevo ingreso a una universidad pública. La autora reporta sus conclusiones en cuatro categorías, asociadas al tipo de procedimientos realizados por los estudiantes: dificultades emergentes de los procedimientos de tipo aritmético, geométrico, métrico y analítico.

En relación a las dificultades geométricas, Barajas (2015) reporta que los estudiantes crean y emplean con dificultad representaciones geométricas para elaborar procedimientos que los conduzcan a solucionar problemas. En cuanto a lo métrico, señala que los estudiantes evidencian debilidades para: identificar relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud, así como para desarrollar referentes de medida para hacer comparaciones y estimaciones.

Los hallazgos anteriores, señalan la pertinencia de nuestro estudio dado que reportan evidencias, a nivel de secundaria y universitaria, sobre las debilidades que presentan los estudiantes en la resolución de problemas y también, de manera específica, en la RdP geométricos.

Basado en los resultados de la prueba Saber de primaria de una institución educativa colombiana, Tarazona (2018) emplea el juego como estrategia metodológica para fortalecer el pensamiento numérico y la competencia resolución de problemas en estudiantes de sexto grado. Al ser una investigación cualitativa, Tarazona (2018) concluye que "la implementación del juego como estrategia metodológica para el planteamiento y la solución de problemas, permitió que los estudiantes estuvieran en un ambiente matemático agradable, trasmitió confianza, permitió desarrollar actitudes y encontrar sentido, significado y aplicabilidad a los aprendizajes matemáticos" (p.156).

Un aporte importante del trabajo de Tarazona (2018) para nuestra investigación, es que el autor señala que la RdP implica cambios metodológicos lo cual "exige a los maestros compromiso para investigar, analizar, diseñar estrategias y llevarlas al salón de clase" (Tarazona, 2018, pp. 68-69). Esta afirmación resulta contundente para nuestro estudio ya que el CalMat requiere superar la metodología tradicional que, por lo general, enmarca la clase de matemáticas.

Además del CalMat, en educación matemática existen una diversidad de materiales didácticos que han sido diseñados y creados para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de la matemática; para el caso de la Geometría, destacan el ábaco, el geoplano, las reglas, los modelos de sólidos geométricos, entre otros, además de los programas de geometría dinámica como Cabri Géomètre y GeoGebra (aunque este tiene otras potencialidades como la graficación de funciones) y, por supuesto, los libros de texto, siendo los *Elementos* de Euclides, quizás, el más antiguo de ellos.

Quereda (2012) señala que un *material didáctico* es aquel recurso que ha sido creado con fines educativos. No obstante, el uso de materiales didácticos en las aulas de clases ha tenido altibajos pues, por ejemplo, en Colombia en la época de la Matemática Moderna, existían muchos profesores de matemáticas convencidos de la importancia de la matemática formal por lo que estos no tenían cabida en sus enseñanzas y se prescindía totalmente de ellos. Sin embargo,

> También hubo grandes defensores e impulsadores de los mismos, de los que cabe destacar a uno de los matemáticos españoles que más trabajaron en la didáctica de las Matemáticas, Puig Adam. […] A lo largo de su vida diseñó instrumentos para manipular las Matemáticas y escribió abundantes libros de texto de todos los niveles. Sus materiales didácticos crearon

> un nuevo estilo de exponer los saberes matemáticos cuya influencia aún perdura. (Quereda, 2012, p.12)

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas de Colombia (MEN, 1998), el Ministerio de Educación Nacional reincorpora los materiales didácticos en la clase de matemáticas y señala que la calidad estos es determinante en los procesos de formación matemática de los estudiantes.

El CalMat es un material didáctico, creado por el profesor de matemáticas Carlos Zuluaga, con el propósito de contribuir a desarrollar el enfoque de planteamiento y resolución de problemas a través del trabajo de un problema diario (Colombia Aprendiendo, 1997-2018). En la Figura 1 se ilustra un Calendario Matemático.

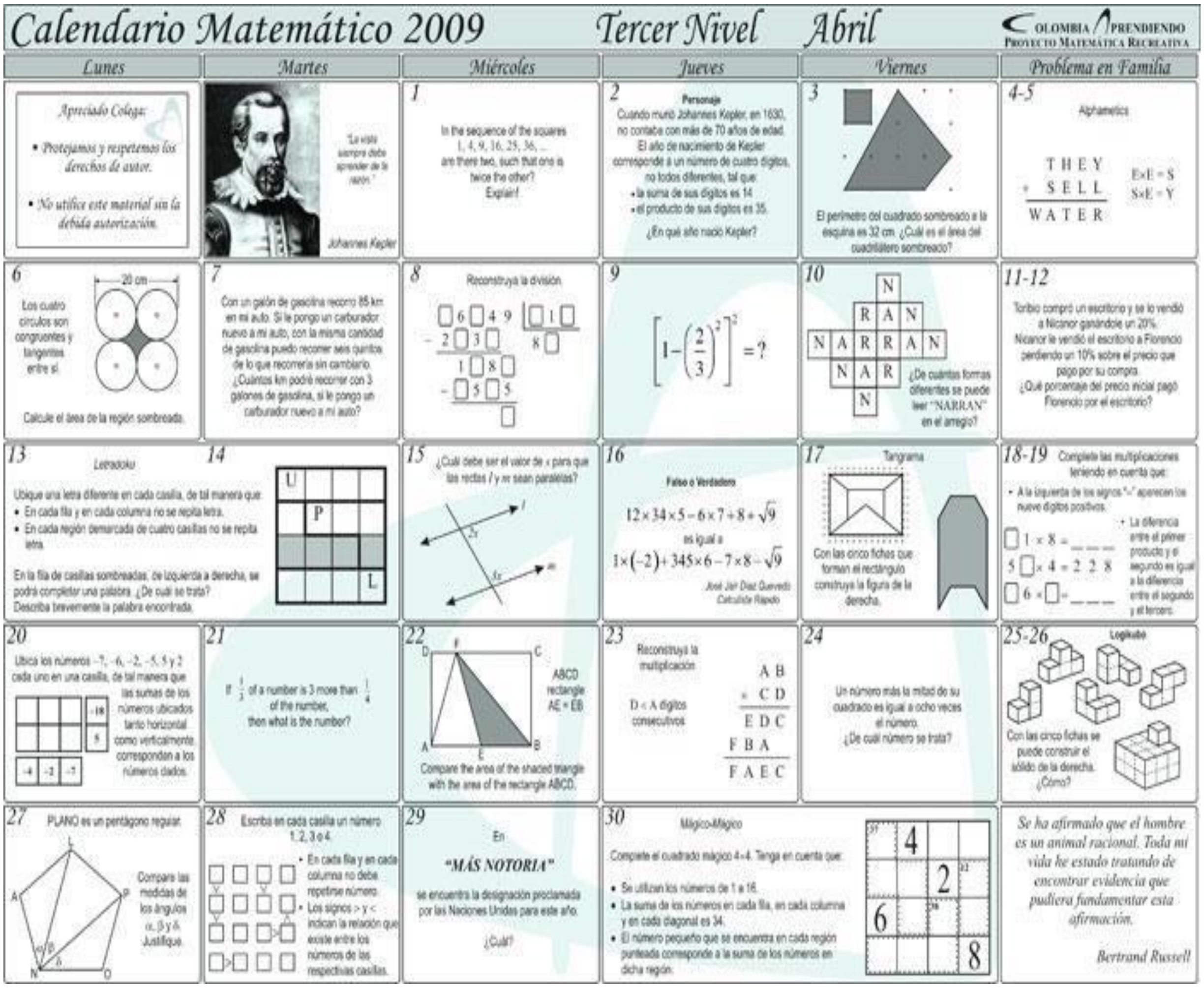


Figura 1. Calendario Matemático del Proyecto Colombia Aprendiendo (abril de 2009).
Fuente: http://www.colombiaaprendiendo.edu.co/material-del-proyecto/calendario-matematico/

Al indagar sobre investigaciones que documenten desde cualquier perspectiva el CalMat, encontramos un estudio: Becerra (2013) reporta que la aplicación de este genera cambios positivos en la RdP en los estudiantes de grado sexto, de un colegio privado. Para esto, diseña una prueba de entrada, basada en el calendario, para medir las aptitudes de los estudiantes frente a la resolución de problemas y determina el comportamiento de los estudiantes frente a este enfoque, con los resultados de la prueba utilizando el examen EXCHOBA (Examen de Habilidades y

Conocimientos Básicos); trabaja con dos grupos (uno experimental y otro de control), y aplica una prueba de salida (similar a la prueba de entrada). Las pruebas construidas manejan los cinco pensamientos que se desarrollan en matemáticas: numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio (MEN, 1998).

A partir de esto, Becerra (2013) comprueba la hipótesis la aplicación del calendario matemático, en grado sexto, genera cambios positivos en los estudiantes frente a la resolución de problemas ya que el porcentaje de dificultades se redujeron significativamente al contrastar las pruebas realizadas, destacando el desempeño en los problemas de componente aritmético.

Si bien no se hallan más investigaciones alrededor del CalMat como material didáctico que aporte positivamente al aprendizaje de las matemáticas, encontramos que Sanabria y Moreno (2015) realizan, en el marco de un evento de educación matemática colombiano, un taller en el cual presentan problemas del calendario con el propósito de difundir el material y orientar pedagógica y metodológicamente sobre su uso. Socializan, además, que desde hace más de 15 años el Grupo de Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander (EDUMAT-UIS), a través del subgrupo *Matemática Recreativa*, promueve el uso del Calendario Matemático en algunas instituciones educativas del Departamento de Santander.

El posicionamiento del CalMat en Santander (Colombia) enfatiza en la necesidad de crear procesos de investigación alrededor de este material y su implementación, lo cual permitirá a otros profesores de matemáticas, instituciones educativas y al Grupo EDUMAT-UIS conocer, desde el marco de la investigación, las bondades y, quizás, restricciones de este material didáctico que intenta aportar a la resolución de problemas matemáticos.

En comparación con la investigación de Becerra (2013), nuestro estudio documenta, de forma más específica, el potencial del uso del CalMat, mediante la metodología de resolución de problemas, para favorecer la solución de problemas. Para esto, en este estudio caracterizamos los problemas del CalMat del Nivel 1 (más adelante precisamos los niveles de este material) en relación a las competencias que se requieren para su solución, lo cual da como resultado una tipificación de los problemas que permite, como valor agregado, conocer con más precisión en qué sentido se da el aporte del Calendario Matemático.

2.2 Bases legales

A continuación, se presenta las bases legales que sustentan este estudio, las cuales se diferencian en aquellas de ámbito internacional y nacional.

2.2.1 Internacionales

El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), fundado en 1920, es “una organización profesional internacional comprometida con la excelencia de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para todos los estudiantes” (NCTM, 2000, p. xiii).

Dicha organización, en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003), orienta sobre qué contenidos y procesos matemáticos deberían los estudiantes aprender a conocer y a ser capaces de usar al avanzar en su educación, esto da paso a los estándares de contenidos y estándares de procesos (véase la Tabla 1). Asimismo, en la Tabla 2 precisamos los estándares del proceso resolución de problemas y los de contenido Geometría y Medida (estos dos estándares están asociados a la enseñanza de la Geometría Plana en el currículo colombiano) para la etapa 3-5 en la cual están, por equivalencia, los estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de La Paz.

Tabla 1.

Estándares de contenidos y procesos del NCTM.

Estándares de contenidos	Estándares de procesos
Números y operaciones	Resolución de Problemas
Álgebra	Razonamiento y Demostración
Geometría	Comunicación
Medida	Conexiones
Análisis de datos y probabilidad.	Representación

Fuente: Adaptado del NCTM (2000).

Tabla 2.

Estándares de proceso resolución de problemas y de contenido geometría y medida del NCTM.

Estándar de proceso	Estándares de contenido	
Resolución de problemas	Geometría	Medida
• Construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas. • Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos. • Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas. • Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él.	• Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas. • Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación. • Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas. • Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelación geométrica para resolver problemas.	• Comprender los atributos mensurables de los objetos, y las unidades, sistemas y procesos de medida. • Aplicar técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas.

Fuente: Adaptación de NCTM (2003).

2.2.2 Nacionales

a. Ley general de educación de Colombia

En su Artículo 20, la Ley 115 del Congreso de la República de Colombia (1994), señala los objetivos generales de la educación básica, entre los cuales destaca: "el desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones, así como la capacidad para solucionar problemas que impliquen estos conocimientos".

b. Lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998)

El MEN, desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, promueve la formulación de un currículo de matemáticas permeado por los **procesos generales** (resolución y planteamiento de problemas, modelación, comunicación, razonamiento y elaboración-comparación-ejecución de procedimientos) que tienen que ver con el aprendizaje matemático y que explicitan lo que significa ser *matemáticamente competente*; los **conocimientos básicos** están organizados en cinco tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio y el variacional) y **el contexto** tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a la Matemática que aprende.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se definen el pensamiento espacial como "[…] el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (MEN, 1998, p.56).

En relación al pensamiento métrico, el MEN señala que los "conceptos y procedimientos propios de este pensamiento hacen referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones” (MEN, 1998, p.63).

De manera que los Lineamientos Curriculares resaltan la importancia de “encaminar la enseñanza de la geometría hacia el desarrollo de la percepción espacial, las representaciones bi y tri dimensionales de las figuras y el estudio de los invariantes de las figuras, sus relaciones y sus propiedades” (MEN, 2004, p.3). Asimismo, propone “un estudio sistemático de patrones de regularidad que conducen al establecimiento de conjeturas y generalizaciones, a partir de las cuales surgen diversas formas argumentativas” (MEN, 2004, p.3). Siendo estas dos propuestas tomadas en cuenta en el diseño de los problemas del CalMat, como se ilustra en la Figura 2.

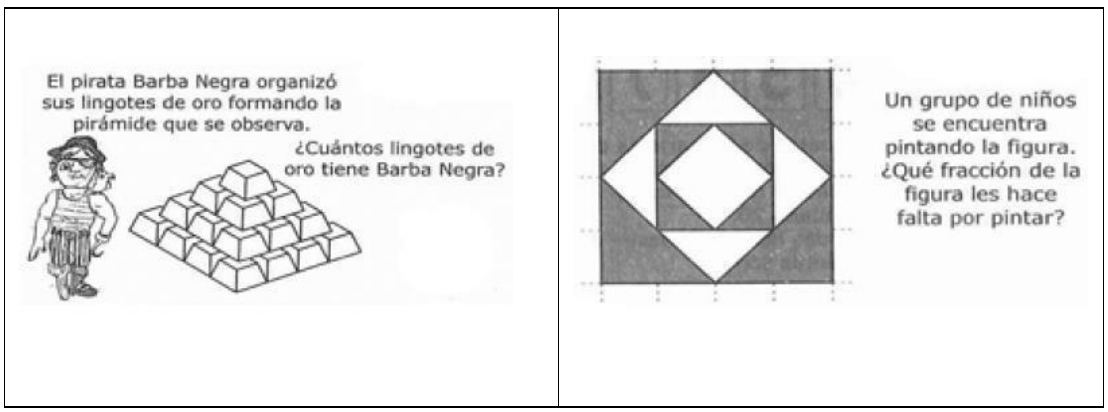


Figura 2. Problemas geométricos del Calendario Matemático.

Fuente: Tomados de Colombia Aprendiendo (1997- 2018), Calendario Matemático, Nivel 1, abril 2014.

Como lo evidencia los problemas anteriores, “probablemente cualquier situación geométrica, por elemental que sea, permite una amplia gama de posibilidades de exploración, formulación de conjeturas y experimentación de situaciones con la idea de explicar, probar o demostrar hechos" (MEN, 2004, p.2). En esto radica, en sí, la importancia de la enseñanza de la Geometría en la escuela.

c. Estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006)

Los estándares son definidos como "un criterio claro y público que permite juzgar si un estudiante, una institución o el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas comunes de calidad" (MEN, 2006, p.11). Al igual que los estándares del NCTM, estos resultan ser un referente para evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los estudiantes en el transcurrir de su vida escolar.

Según el MEN, ser *matemáticamente competente* "requiere ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de cada uno de esos procesos generales, en los cuales cada estudiante va pasando por distintos niveles de competencia" (MEN, 2006, p.56). La resolución de problemas es uno de los procesos generales y como tal "este es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aún, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas" (MEN, 2006, p.52), aspecto que guarda trazabilidad con la Ley General de Educación y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

Para el caso de los estudiantes de cuarto grado de primaria, según el MEN (2006, p.82), los estándares asociados al pensamiento espacial son:

a) Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.

b) Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.
c) Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.
d) Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.
e) Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.
f) Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.
g) Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.
h) Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.

Para el caso de los estudiantes de cuarto grado de primaria, según el MEN (2006, p.83), los estándares asociados al pensamiento métrico son:

a) Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos).
b) Selecciono unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.

c) Utilizo y justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias, utilizando rangos de variación.
d) Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos.
e) Justifico relaciones de dependencia del área y volumen, respecto a las dimensiones de figuras y sólidos.
f) Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas.
g) Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas.

Según lo anterior, la enseñanza de la geometría se inicia desde temprana edad, y requiere de una adecuada orientación pues no se trata de enseñar conceptos que deban memorizarse, sino que, de manera coherente con la propuesta curricular colombiana, los estudiantes deben desarrollar alrededor de los objetos geométricos las habilidades asociados a los procesos matemáticos, entre ellos la resolución de problemas.

Finalmente, en esta investigación llamamos *problemas geométricos* a aquellos que consideren los conceptos relacionados en los estándares de cuarto grado de primaria tanto del pensamiento espacial como del métrico.

2.3 Bases teóricas

En este apartado presentamos, inicialmente, la resolución de problemas con el propósito de facilitar su entendimiento como proceso mental y como enfoque metodológico y, finalmente, teorizamos sobre el Calendario Matemático como material didáctico.

2.3.1 Resolución de problemas

La "resolución de problemas" está fuertemente relacionada con el "aprender matemáticas" porque la matemática no es una materia con contenido fijo o terminado, sino que, debe entenderse, es una disciplina donde el estudiante posee la oportunidad de participar activamente en su construcción.

> La idea de aprender matemáticas corresponde con la intervención activa del estudiante en la construcción y desarrollo de relaciones o resultados matemáticos (…). En este proceso, el estudiante recolecta información, descubre o crea relaciones, discute sus ideas, plantea conjeturas, y constantemente evalúa y contrasta sus resultados (Santos-Trigo, 1997, pp. 12 y 17).

El aprender matemáticas, entonces, es más que aprender conceptos acerca de números, realizar operaciones con ellos, resolver ecuaciones, etcétera, incluye abstraer, crear, probar y encontrarles sentido a las ideas matemáticas. Todas estas cualidades están asociadas a la resolución de problemas.

El NCTM (2003) señala que la resolución de problemas es importante porque sirve de medio para aprender nuevas ideas y destrezas matemáticas.

2.3.1.1 Como proceso mental.

Recientemente se ha venido reconociendo entre la comunidad de educadores matemáticos la importancia de promover en los estudiantes un aprendizaje que supere lo memorístico; se afirma que en el estudio de las matemáticas es necesario atender tanto a las líneas de contenidos como a los procesos donde los estudiantes tengan oportunidades de examinar casos particulares, formular conjeturas, presentar argumentos y comunicar resultados (MEN, 1998).

El MEN (1998) señala que la resolución de problemas es uno de los cinco procesos generales de la actividad matemática. Afirma, además, que "este es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica" (MEN, 2003, p.52).

Rico (2006) señala que los procesos matemáticos describen lo que hacen los individuos para relacionar el contexto de un problema con las matemáticas.

> Los procesos que deben activarse para conectar el mundo real, donde surgen los problemas con las matemáticas y resolver entonces la cuestión planteada, lo cual permite concretar el significado general mediante diversos tipos de capacidades de análisis, razonamiento y comunicación que los estudiantes ponen en juego cuando resuelven o formulan problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones (Rico, 2006, p.282).

De manera puntual, el NCTM (2003) señala que "la resolución de problemas es la piedra angular de las matemáticas escolares. Sin la habilidad para resolver problemas, la utilidad y el poder de las ideas matemáticas, y el conocimiento y las destrezas, están gravemente limitados" (p.186).

Precisamos, a partir de Williner (2014), que una habilidad matemática es la facultad personal de efectuar un procedimiento eficientemente, es decir, la capacidad de realizar acciones correctamente en relación al logro del objetivo planteado.

Al revisar los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003), los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares de Competencias Básicas en Matemáticas (MEN, 2006) difícilmente encontramos con precisión qué es el proceso de resolución de problemas, en lugar de ello hallamos orientaciones metodológicas de cómo promover su desarrollo desde el aula de clase.

No obstante, del estudio de los referentes anteriores, deducimos que la resolución de problemas es *la capacidad de un individuo para seleccionar o diseñar un plan o estrategia para solucionar problemas utilizando conocimientos matemáticos acordes con su edad y su nivel de formación*. Además de desarrollar y utilizar diversas estrategias, los estudiantes necesitan también aprender a formular preguntas que amplíen los problemas (NCTM, 2003). Esta capacidad esta inherentemente asociada con la competencia matemática, constructo que se refiere a la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas (OCDE, 2016, p.75).

2.3.1.2 Como enfoque metodológico.

El profesor adopta un modelo que ha construido a partir de sus experiencias previas con las matemáticas, las cuales se traducen en concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Zapata y Blanco, 2007; Benítez, 2011). De ahí, a lo largo de la historia, se han constituido distintitas escuelas con diversas posiciones y discusiones sobre el origen y la naturaleza de las matemáticas: platonismo, logicismo, instrumentalismo, estructuralismo, formalismo, constructivismo, entre otras.

Ernest (1989) explica que "el modelo de la enseñanza de las matemáticas es la concepción del profesor sobre el tipo y el alcance de los roles docentes, las acciones y las actividades del aula asociadas con la enseñanza de las matemáticas" (p.15).

Al estudiar las concepciones de los profesores de matemáticas, el autor sintetiza tres puntos de vista que, con frecuencia, se observan en la enseñanza de las matemáticas (Ernest, 1989):

1. Las matemáticas no son un producto acabado, sino un conocimiento dinámico que está constantemente expandiéndose y reajustándose de acuerdo con nuevas situaciones problemáticas (resolución de problemas).
2. Las matemáticas son un producto monolítico e inmutable, el cual es descubierto y no creado (platónico).
3. Las matemáticas son una disciplina útil basada en una colección de hechos, reglas y habilidades no suficientemente relacionados (el punto de vista instrumental).

En cada uno de esos modelos se específica el rol del profesor y su perfil en la instrucción, los cuales son:

1. Profesor como Instructor: procura el dominio de habilidades con un rendimiento correcto.
2. Profesor como Explicador: busca la comprensión conceptual con conocimiento unificado.

3. Profesor como Facilitador: plantea problemas a los estudiantes y media para que los resuelvan.

Lo expuesto es relevante para nuestra investigación, en el sentido que el CalMat es un material didáctico que busca, reiteramos, contribuir al enfoque de resolución de problemas lo que, a comprensión de las investigadoras, supone que el profesor sea un facilitador. Y es que Santos-Trigo (2007) señala que identificar la resolución de problemas como una propuesta para aprender matemáticas implica reconocer las características asociadas a su enseñanza. Esto ha originado algunas propuestas, entre las cuales las más conocidas son las de los investigadores Polya anteriormente expuestas y Alan Schoenfeld (MEN, 1998).

Polya (1975) identifica y divulga las estrategias generales que él mismo empleaba para solucionar problemas, que, si bien no garantizaban la solución, sí ayudaban a llegar a ella. Polya da a conocer cuatro fases para resolver problemas:

- *Comprensión del problema:* hace referencia a identificar las variables, los datos y las condiciones, si son suficientes o no.
- *Concepción de un plan:* hace referencia a buscar situaciones análogas que le permita tener una idea clara de cómo se aborda el problema.
- *Ejecución del plan:* hace referencia a ir comprobando cada uno de los pasos y verificar si son correctos o no.

- *Visión retrospectiva:* hace referencia a examinar la solución, es decir, si este método de solución funciona a la hora de enfrentar otro problema.

Estas fases fueron tomadas al pie de la letra por muchos profesores, quienes las enseñaron a sus estudiantes como método para resolver problemas. Es decir, se diseñaba una serie de preguntas relacionadas con cada una de las fases para que los estudiantes las discutieran. Frecuentemente, el proceso de seguir el modelo de Polya se volvía rígido y rutinario para el estudiante. Muchas veces era obligado a seguir las fases, aun cuando podía resolver el problema inmediatamente (Santos-Trigo, 1997, p.85).

Por su parte, Schoenfeld orienta sobre lo que debe ser el ambiente en una clase de matemáticas:

> En el salón de clase hay que propiciar a los estudiantes condiciones similares a las condiciones que los matemáticos experimentan en el proceso de desarrollo de las matemáticas. Schoenfeld mencionó que los estudiantes necesitan aprender matemáticas en un salón de clase que represente un microcosmo de la cultura matemática, esto es, clases en donde los valores de las matemáticas como una disciplina con sentido sean reflejados en la práctica cotidiana. (MEN, 1998, p.53)

Es importante que en el proceso de aprender matemáticas el estudiante se desenvuelva en un ambiente de clase que favorezca la discusión de las ideas entre compañeros, la presentación de conjeturas, que permita el uso de ejemplos y contraejemplos para convencerse a sí mismo y a los otros de los resultados obtenidos (Santos-Trigo, 1997), aspectos que serán tomados en cuenta en el trabajo de campo de nuestra investigación ya que, según lo anterior, el CalMat requiere de un microcosmos matemático donde, el profesor "prueba la curiosidad de los estudiantes planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello" (Polya, 1981, p.7).

Es sabido que los estudiantes cuando se enfrentan a un problema suelen solicitar ayuda del profesor, en el enfoque de RdP el profesor debe discernir el momento en el cual el estudiante necesita su apoyo y cuando puede trabajar productivamente sin ella. Incluso, el NCTM (2003) afirma que, si "se les ayuda prematuramente, se les puede privar de la oportunidad de hacer descubrimientos matemáticos" (p.190).

De manera que, tras la consolidación de este apartado, concluimos que la resolución de problemas es una moneda cuyas caras están intrínsecamente relacionadas, cuya caracterización, en ocasiones, no es clara para los profesores de matemáticas.

Teniendo en cuenta que lo abordado sobre el soporte teórico del enfoque de RdP y del pensamiento geométrico-métrico, a continuación, precisamos el trabajo del Calendario Matemático, material didáctico basado en el enfoque de RdP.

2.3.2 Material Didáctico: el Calendario Matemático del Proyecto Colombia Aprendiendo

Coriat (1997) define como material didáctico a todos los objetos usados por el profesor o el estudiante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el fin de lograr unos objetivos didácticos pues ayudan a construir, entender o consolidar conceptos, ejercitar y reforzar procedimientos e incidir en las actitudes de los estudiantes.

Alsina, Burgués y Fortuny (1988) realizan una clasificación atendiendo su funcionalidad: materiales dedicados a la comunicación visual, materiales para dibujar, leer, para hacer medidas indirectas o directas; materiales que son modelos, materiales para la construcción de conceptos; para mostrar aplicaciones, resolver problemas y para realizar demostraciones y comprobaciones. Tan amplia funcionalidad, nos permite inferir que el diseño de materiales didácticos responde, de alguna manera, a las distintas necesidades de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas y, además, permite acercar al estudiante al quehacer matemático, al proporcionar una mayor participación e independencia por parte del alumno en la construcción de aprendizajes significativos.

El material didáctico que sirve de mediador en la resolución de problemas de este estudio llega a Colombia por la inquietud de un profesor de matemáticas, tal cual lo expresa en su trabajo Becerra (2013):

> El calendario matemático es un material que Carlos Zuluaga adaptó, de otros países para abordarlo en Colombia; como lo manifestó en entrevista realizada el 21 de Julio de 2011, Él no inventó el calendario, lo que él hizo fue observar que, en varias partes del mundo, este se usaba como una estrategia de aprendizaje de las matemáticas y se hizo una pregunta: "¿si el calendario funciona en otros países porque no puede funcionar en Colombia?", entonces con un equipo de trabajo se dieron a la tarea de construir ese tipo de problemas (Becerra, 2013, pp. 33-34).

Becerra (2013)[1] señala que el CalMat está distribuido en seis niveles (véase la Figura 3), los cuales deben ser incorporados en cada institución educativa según las necesidades de cada grado.

Figura 3. Niveles del Calendario Matemático del grupo Colombia Aprendiendo.
Fuente: Elaboración de las investigadoras.

Estos niveles van de menor a mayor dificultad: el Semanario, al ser para niños de preescolar, es más sencillo en comparación con el calendario de Nivel 4 que es para estudiantes de décimo o undécimo grado (los dos últimos grados del sistema educativo colombiano). Además, los calendarios de Grandes Pensadores hasta el Nivel 4 asignan un problema a cada día del calendario, esto incluye sábado y domingo, el cual es llamado “problema en familia”.

Para efectos de nuestra investigación, trabajamos el Nivel 1con los estudiantes de cuarto grado de primaria de la institución Reina de La Paz. Como producto de nuestra experiencia con el material, consideramos importante analizar los problemas geométricos de distintos calendarios de este nivel para tipificarlos teniendo en cuenta las competencias matemáticas que estos exigen para su solución, esto a razón de que se identificó que los problemas tienen diferente exigencia al

[1] Consultar en la página web oficial de Colombia Aprendiendo <http://www.colombiaaprendiendo.edu.co/>

interior de un mismo nivel (ampliación de esto en el capítulo de la metodología). Esta tipificación fue tomada en cuenta para ponderar los problemas que se incluyeron en los test inicial y final.

Cabe señalar que la iniciativa de dicha tipificación surge al observar que el ICFES define "niveles de desempeño" en los cuales se relacionan las competencias y los componentes evaluados en la prueba Saber. De manera que, al saber que los problemas de los niveles del CalMat tienen diferente nivel de complejidad, definimos una caracterización de los tipos de problemas geométrico del Nivel 1, refiriéndonos con esto a las competencias matemáticas que se requieren para solucionar determinados problemas del componente. (Esto se amplía en el capítulo de la metodología). Con esto, intentamos establecer una relación de coherencia con la evaluación interna que realiza el ICFES en la prueba Saber y lo planteado en esta investigación.

En lo expuesto en las secciones anteriores, hemos enfatizado en que la RdP es importante en el aprendizaje matemático. Por ello, también hemos prestado atención al tipo de problemas que les permite a los estudiantes no sólo buscar respuestas de forma mecánica sino potenciar su aprendizaje.

Santos-Trigo (1997) señala que es difícil definir el término *problema* dada la relatividad del esfuerzo que le exige a un individuo cuando intenta resolver "un problema. Incluso, el autor, afirma que "el hecho de que exista un problema no es una propiedad inherente de la tarea matemática: la palabra está ligada a la relación o interacción entre el individuo y esa tarea" (Santos-Trigo, 1997, p.48).

Esta dificultad la enfrentó Polya quien no definió lo que entendía por problema cuando escribió su libro *How to solve it* en 1945 (versión en inglés). Sin embargo, posteriormente, Polya (1961) se vio obligado a proporcionar una definición: "*Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata"* (Conejo y Ortega, 2013, p.132). Otra definición:

> Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma (Krulik y Rudnik, 1980 citados por Ortega, Pecharroman y Sosa, 2011, p. 102).

En contraste con lo anterior, muchas ocasiones suele quedar la impresión de que los problemas que se plantean a los estudiantes no son realmente problemas, sino ejercicios que pueden ser resueltos en corto tiempo (Schoenfeld, 1985, citado por Santos-Trigo, 1997) ya que no implican una actividad intensa de pensamiento para su resolución. Al realizarlos, el estudiante se da cuenta muy pronto de que no le exigen grandes esfuerzos.

Para efectos de nuestra investigación, de las definiciones de Polya y Krulik y Rudnik, entenderemos que un estudiante está frente a un problema si aquel surte las siguientes tres condiciones: *aceptación*, *bloqueo* y *exploración* (véase la Figura 4).

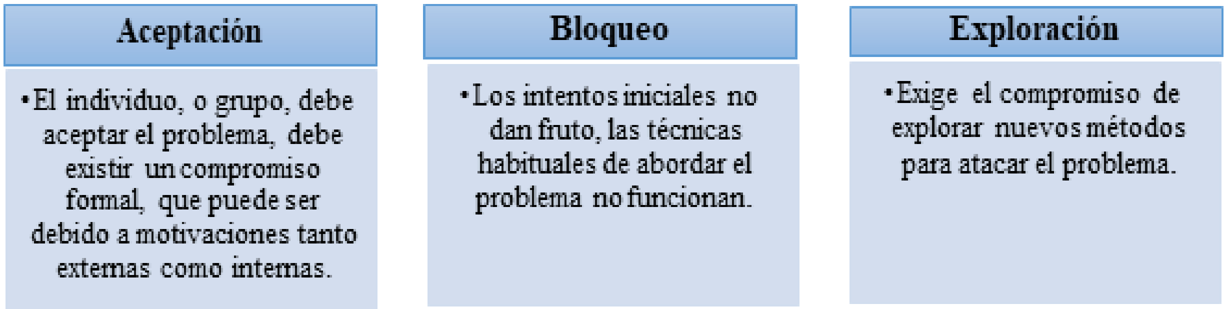


Figura 4. Condiciones que debe cumplir un problema.
Fuente: Adaptación de Ortega, Pecharroman y Sosa (2011).

Respecto al tipo de problemas, tomamos la clasificación de Fredericksen (1984 citado por Santos-Trigo, 1997), quien considera implícitamente la de Polya (él los clasifica en: *aquellos que piden encontrar algo*, y *aquellos donde debe probarse algo*), propone las categorías de laTabla 3.

Tabla 3.
Clasificación de los problemas.

Tipo de problemas	**Descripción**
1. Bien estructurados	Son aquellos que están formulados con claridad, se resuelven con el uso de algún algoritmo conocido, y hay criterios para verificar si la solución es correcta.
2. Estructurados que requieren un “pensamiento productivo”	Son similares a los bien estructurados, con el valor agregado de que se debe elaborar todo el proceso de solución o parte de él.
3. Mal estructurados	Son aquellos que no están bien formulados, carecen de un procedimiento que garantice su solución y no hay criterios para determinar si se ha obtenido una solución.

Fuente: Adaptado de Santos-Trigo (1997, p. 50).

Para el caso de los problemas propuestos en el CalMat, se puede afirmar que los problemas en este material didáctico son bien estructurados y de pensamiento productivo.

De otra parte, es importante señalar que el MEN (1998) afirma que los problemas son un contexto para acercarse al conocimiento matemático en la escuela, enfatizando que

> Tradicionalmente los alumnos aprenden matemáticas formales y abstractas, descontextualizadas, y luego aplican sus conocimientos a la resolución de problemas presentados en un contexto. Con frecuencia "estos problemas de aplicación" se dejan para el final de una unidad o para el final del programa, razón por la cual se suelen omitir por falta de tiempo.
>
> Las aplicaciones y los problemas no se deben reservar para ser considerados solamente después de que haya ocurrido el aprendizaje, sino que ellas pueden y deben utilizarse como contexto dentro del cual tiene lugar el aprendizaje. El contexto tiene un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es decir, no sólo en la fase de aplicación sino en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o reinventan las matemáticas (MEN, 1998, p. 24).

Esta directriz soporta la decisión de trabajar, en esta investigación, con problemas desde el inicio hasta el final de clase en el trabajo de campo. Es decir, en la implementación inherente a esta investigación, la profesora proporcionó problemas geométricos, extraídos de Calendarios Matemáticos del Nivel 2, y, en la medida que se evidenció la necesidad, introdujo los conceptos que los estudiantes desconocían.

> En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van

aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel (MEN, 1998, p.52).

Finalmente, consideramos importante precisar que cada perspectiva de la resolución de problemas (como proceso mental y como enfoque metodológico) está articulada la una con la otra, en tanto que debe entenderse que la RdP es un proceso mental que debe desarrollarse en el estudiante a lo largo de su formación matemática, esto mediante un enfoque metodológico coherente que potencie su desarrollo en el marco de un microcosmos matemático en donde el profesor es un mediador y no un instructor o explicador.

Asimismo, tras la consolidación de este apartado, deducimos que el CalMat no es solo un *problemario* sino que en él subyace un modelo de enseñanza orientado a contribuir al "aprender matemáticas", lo que está estrechamente relacionado con la resolución de problemas.

Precisamos que en esta investigación no nos interesamos en la RdP desde la perspectiva de la enseñanza sino del aprendizaje, en lo que se refiere a la solución de problemas que realizan los estudiantes de cuarto grado de primaria de la institución educativa Reina de la Paz, esto se observó desde los aciertos y desaciertos emergentes de los test inicial y final diseñados a partir de problemas geométricos propuestos en distintos Calendarios Matemáticos del Proyecto Colombia Aprendiendo.

2.4 Formulación de hipótesis

2.4.1 Hipótesis general

El uso del Calendario Matemático como material didáctico fortalece la resolución de problemas geométricos en los estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de la Paz de Floridablanca, Santander, en el 2018.

2.4.2 Hipótesis específicas

a) El uso del Calendario Matemático como material didáctico fortalece la resolución de problemas geométricos de tipo 1 en los estudiantes de cuarto grado de primaria de la institución educativa Reina de la Paz.

b) El uso del Calendario Matemático como material didáctico fortalece la resolución de problemas geométricos de tipo 2 en los estudiantes de cuarto grado de primaria de la institución educativa Reina de la Paz.

c) El uso del Calendario Matemático como material didáctico fortalece la resolución de problemas geométricos de tipo 3 en los estudiantes de cuarto grado de primaria de la institución educativa Reina de la Paz.

2.5 Operacionalización de variables

Tabla 4.

Operacionalización de las variables

Variable	Definición	Dimensión	Indicador
V. Dependiente: Resolución de problemas geométricos	Capacidad de un individuo para seleccionar o diseñar un plan o estrategia para solucionar problemas geométricos utilizando conocimientos geométricos acordes con su edad y su nivel de formación	Comprensión del problema. Concepción de un plan. Ejecución del plan. Visión retrospectiva.	Identificación del objetivo del problema y reconoce los datos necesarios para su solución. Formulación de una estrategia de solución. Uso de procedimientos y conceptos geométricos. Revisión de la solución obtenida.
V. Independiente: Metodología tradicional y Metodología CalMat	Metodología mediante la cual se usa el Calendario Matemático como material didáctico, además de su enfoque de resolución de problemas.	Estrategia de enseñanza basada en problemas.	Grado de análisis de los problemas por parte de los estudiantes. Conexión entre los presaberes y los nuevos conceptos de los estudiantes. Adaptación al propio estilo de aprendizaje del estudiante. Estimulación del desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. Desarrollo de estrategias heurísticas para la resolución de problemas.

Fuente: Elaboración propia.

2.6 Definición de términos básicos

Calendario Matemático: material didáctico que tiene por objetivo contribuir a desarrollar el Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas a través del trabajo de un problema cada día (Colombia Aprendiendo, 1997-2018).

Capacidad: conjunto de condiciones necesarias para llevar a cabo una actividad concreta. (Dorsch, 1985).

Competencia matemática: "capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos" (OCDE, 2016, p.74).

Material didáctico: objetos usados por el profesor o el alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el fin de lograr unos objetivos didácticos (Coriat, 1997).

Pensamiento: Aquello que existe a través de la actividad intelectual. Se trata del producto de la mente nacido de los procesos racionales del intelecto o de las abstracciones de la imaginación (Pérez y Gardey, 2011).

Problema: buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata (Polya, 1961).

Problema geométrico: aquellos que consideran los conceptos asociados a los pensamientos espacial y métrico del MEN (1998).

Prueba Saber: prueba nacional obligatoria para los estudiantes colombianos. Es aplicada por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación – ICFES–, entidad gubernamental.

Resolución de Problemas: "capacidad del individuo para emprender procesos cognitivos con el fin de comprender y resolver situaciones problemáticas en las que la estrategia de solución no resulta obvia de forma inmediata" (OCDE, 2013, p. 12).

Capítulo 3

METODOLOGÍA

3.1 Tipo y nivel de investigación

Teniendo como horizonte nuestra pregunta de investigación y objetivos a cumplir, se eligió el **enfoque cuantitativo** como el indicado para el desarrollo de este estudio. Recordemos que las investigaciones cuantitativas utilizan como insumo de análisis información de tipo cuantitativo o cuantificable para explicar el fenómeno bajo observación y, por tanto, es importante analizar la forma en la que esta información es obtenida, ya que el método define el tipo de investigación cuantitativa a realizar.

Es así que la investigación realizada es de **tipo experimental** ya que es un estudio en el que se manipula intencionalmente una variable independiente, para analizar las consecuencias que la manipulación tiene sobre una variable dependiente, dentro de una situación de control para las investigadoras (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

El alcance de nuestra investigación es **explicativo**, pues se mide y explica el efecto de cada uno de los tipos de enseñanza (tradicional y CalMat) sobre el aprendizaje de la geometría, para esto optamos por un **diseño con grupo control** y experimental con pretest y pos-test.

3.2 Diseño de la investigación

Anteriormente se aclaró que el tipo de investigación utilizado es experimental; para especificar un poco más sobre el diseño, podemos argumentar que en el desarrollo de esta investigación se trabajó con un **experimento puro** pues, como menciona Hernández, Fernández y Baptista (2014), experimento es una situación de control en la cual se manipulan, de manera intencional, una o más variables independientes (causas) para analizar las consecuencias de tal manipulación sobre una o más variables dependientes (Efectos).

Los experimentos puros son aquellos que reúnen los dos requisitos para lograr control y la validez interna: (1) grupos de comparación (Manipulación de la variable independiente) y (2) equivalencia de los grupos. De manera que nuestra investigación posee estas características ya que:

a. Manipulamos intencionalmente, durante el desarrollo del experimento, de la variable independiente (tomó dos valores: "metodología tradicional" y "metodología con el uso del CalMat").
b. Medimos la variable dependiente (asignamos calificaciones) para los tres tipos de problemas en dos tiempos prestest y postest.
c. Reflejamos *el control* y *la validez del experimento* en la selección de unidades experimentales homogéneas (estudiantes).
d. Trabajamos con dos grupos (experimental y control), los cuales los conformamos asignando estudiantes en forma aleatoria.

Lo anterior, nos exigió realizar un **diseño experimental** que se ajustó a las cualidades de un experimento puro con: pretest-postest y grupo control, el uso de este diseño se sustenta desde Petrosko (2004 citado por Hernández, Fernández y Baptista, 2014) quien afirma:

> Este diseño [el mencionado anteriormente] incorpora la administración de prepruebas a los grupos que componen el experimento. Los participantes se asignan al azar a los grupos y después se les aplica simultáneamente la preprueba; un grupo recibe el tratamiento experimental y el otro no (es el grupo control); por último, se les administra, también simultáneamente, una posprueba (p. 128).

A continuación, presentamos el esquema de diseño de la investigación:

$$\begin{array}{l} GE: O_1 \; X \; O_2 \\ GC: 0_3 \quad\;\; O_4 \end{array}$$

donde:

GE: Grupo experimental

GC: Grupo Control

O_1: Observaciones pretest en el GE

O_2: Observaciones postest en el GE

O_3: Obseraciones pretest en el GC.

O_4: Observaciones postest en el GC.

X: Tratamiento: uso del CalMat como recurso didáctico.

Ahora en términos estadísticos, señalamos que nuestro diseño experimental estuvo compuesto por una estructura de tratamiento en una vía completamente aleatorizada, cuyo modelo estadístico lineal correspondiente se presenta en la ecuación 1.

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + e_{ij} \ (1)$$

donde:

Y_{ij}: es la observación tomada de la j-ésima unidad experimental bajo el tratamiento i.

μ: Es la media global.

τ_i: Es el efecto del tratamiento i.

e_{ij}:Es el efecto de la j-ésima unidad experimental sujeta al tratamiento (error experimental).

$E(e_{ij}) = 0$; $E(e^2_{ij}) = \sigma^2$;

La información proveniente de este diseño, la evaluamos a través del Análisis de Varianza para un diseño completamente aleatorizado.

3.2.1 Variables

De antemano queremos señalar que durante el proceso de experimentación no tuvimos en cuenta ninguna covariable dado que, bajo nuestro criterio, ninguna variable de tipo continuo envuelta en la experimentación tiene efecto significativo sobre la variable dependiente de interés.

a. Variables dependientes: medimos las siguientes variables durante el proceso experimental, la cuales están asociadas a la variable “resolución de problemas geométricos”:

- Puntaje promedio pretest: Problema tipo 1: variable que mide el puntaje promedio de los problemas tipo 1 planteados en los tres pretest y la cual está definida como:

$$(\mathrm{P1\_PRE}) = \mathrm{PUNTAJE\ PROMEDIO\ PRETEST\ PROBLEMAS\ TIPO\ 1} = \frac{P_1PRE_1 + P_1PRE_2 + P_1PRE_3}{3},$$

donde:

P_1PRE_1: Puntaje Problema tipo 1en pretest 1.

P_1PRE: Puntaje Problema tipo 1en pretest 2.

P_1PRE_3: Puntaje Problema tipo 1en pretest 3.

- Puntaje promedio pretest: Problema Tipo 2: variable que mide el puntaje promedio de los problemas tipo 2 planteados en los tres pretest y la cual está definida como:

$$(\mathrm{P2\_PRE}) = \mathrm{PUNTAJE\ PROMEDIO\ PRETEST\ PROBLEMAS\ TIPO\ 2} = \frac{P_2PRE_1 + P_2PRE_2 + P_2PRE_3}{3},$$

donde:

P_2PRE_1: Puntaje Problema tipo 2 en pretest 1.

P_2PRE_2: Puntaje Problema tipo 2 en pretest 2.

P_2PRE_3: Puntaje Problema tipo 2 en pretest 3.

- Puntaje Promedio Pretest Problema Tipo 3: variable que mide el puntaje promedio de los problemas tipo 2 planteados en los tres pretest y la cual está definida como:

$$(\mathrm{P3\_PRE}) = \mathrm{PUNTAJE\ PROMEDIO\ INICIAL\ PROBLEMAS\ TIPO\ 3} = \frac{P_3PRE_1 + P_3PRE_2 + P_3PRE_3}{3},$$

donde:

P_3PRE_1: Puntaje Problema tipo 3 en pretest 1.

P_3PRE_2: Puntaje Problema tipo 3 en pretest 2.

P_3PRE_3: Puntaje Problema tipo 3 en pretest 3.

- Puntaje Total Pretest: variable que mide el puntaje ponderado de los puntajes promedios Pretest de los problemas tipo 1, tipo 2 y tipo 3.

$$\mathrm{PTPRE} = \mathrm{PUNTAJE\ TOTAL\ PRETEST} = (0.2 * \mathrm{P1\_PRE}) + (0.3 * \mathrm{P2\_PRE}) + (0.5 * \mathrm{P3\_PRE})$$

- Puntaje Promedio Postest Problema Tipo 1: variable que mide el puntaje promedio de los problemas tipo 1 planteados en los tres pos-test y la cual está definida como:

$$(\mathrm{P1\_POS}) = \text{PUNTAJE PROMEDIO POSTEST PROBLEMAS TIPO } 1 = \frac{P_1POS_1 + P_1POS_2 + P_1POS_3}{3},$$

donde:

P_1POS_1: Puntaje Problema tipo 1en pos-test 1.

P_1POS_2: Puntaje Problema tipo 1en pos-test 2.

P_1POS_3: Puntaje Problema tipo 1en pos-test 3.

- Puntaje Promedio Postest Problema Tipo 2: variable que mide el puntaje promedio de los problemas tipo 2 planteados en los tres pos-test y la cual está definida como:

$$(\mathrm{P2\_POS}) = \text{PUNTAJE PROMEDIO POSTEST PROBLEMAS TIPO } 1 = \frac{P_2POS_1 + P_2POS_2 + P_2POS_3}{3}$$

donde:

P_2POS_1: Puntaje Problema tipo 2 en pos-test 1.

P_2POS_2: Puntaje Problema tipo 2 en pos-test 2.

P_2POS_3: Puntaje Problema tipo 2 en pos-test 3.

- Puntaje Promedio Postest Problema Tipo 3: Variable que mide el puntaje promedio de los problemas tipo 3 planteados en los tres pos-test y la cual está definida como:

$$(\mathrm{P3\_POS}) = \text{PUNTAJE PROMEDIO POSTEST PROBLEMAS TIPO } 1 = \frac{P_3POS_1 + P_3POS_2 + P_3POS_3}{3},$$

donde:

P_3POS_1: Puntaje Problema tipo 3 en pos-test 1.

P_3POS_2: Puntaje Problema tipo 3 en pos-test 2.

P_3POS_3: Puntaje Problema tipo 3 en pos-test 3.

- Puntaje Total Postest: Variable que mide el puntaje ponderado de los puntajes promedios Postest de los problemas Tipo 1, Tipo 2 y Tipo 3.

$$\mathrm{PTPOS} = \text{PUNTAJE TOTAL POSTEST} = (0.2 * \mathrm{P1\_POS}) + (0.3 * \mathrm{P2\_POS}) + (0.5 * \mathrm{P3\_POS})$$

b. Variable independiente: Durante el proceso experimental se manipuló la variable independiente "metodología" que poseía dos niveles (dos tratamientos), cada uno de ellos asociado al tipo de enseñanza: metodología tradicional y metodología del CalMat.

3.2.2 Tratamientos

En nuestro diseño experimental, a cada uno de los grupos bajo observación les fue asignado un tratamiento, es así que al grupo control le fue asignado el tratamiento "Metodología tradicional de la enseñanza de la geometría" y al grupo experimental el tratamiento "Metodología del CalMat". Las especificaciones de cada uno de los tratamientos se presentan a continuación:

1. Metodología tradicional de la enseñanza de la geometría (Tratamiento Control $\boldsymbol{T}_0$): bajo este tratamiento, a los estudiantes les orientamos geometría bajo el enfoque tradicional de clase magistral; es decir, una clase de geometría en donde se exponen los temas teóricos en la pizarra y una vez abordados, se realizan una serie de ejemplos y, a partir de estos, los estudiantes resuelven ejercicios y problemas planteados por el docente.
2. Metodología del CalMat para la enseñanza de la geometría (Tratamiento Experimental $\boldsymbol{T}_1$): bajo este tratamiento, a los estudiantes se les orientó geometría utilizando el CalMat como material didáctico y su respectivo enfoque; es decir, durante la clase de geometría planteamos un problema a los estudiantes para que ellos lo analizaran y formularan estrategias de solución en forma individual o grupal; en este proceso, la profesora encargada no expuso ningún tema teórico de forma directa sino que explicaba o daba información según los estudiantes los solicitaran, esto en aras de resolver el problema (ver Anexo 2).

3.2.3 Unidades experimentales

El conjunto de unidades experimentales (UE) estuvo conformado por 21 estudiantes de cuarto grado de primaria con edades entre los 9 y 10 años, de género masculino y femenino. Para cumplir con los requisitos de un diseño experimental, el grupo fue dividido aleatoriamente en dos subgrupos de 10 y 11 estudiantes bajo el siguiente protocolo: (1) Cada uno de los 21 estudiantes los identificamos con un número entre 1 y 21; y, (2) construimos una tabla con 21 números aleatorios diferentes numerados del 1 al 21.

3.3 Población y muestra

La institución educativa Reina de la Paz, está ubicada en el municipio de Floridablanca, perteneciente al departamento de Santander (Colombia). A la fecha esta Institución ofrece educación a 721 estudiantes desde el nivel educativo preescolar hasta el sexto grado de bachillerato.

La población bajo estudio fue de 26 estudiantes (6 niños y 20 niñas) cuyas edades oscilaban 9 y 10 años (la edad de los 6 niños es de 9 años y las 20 niñas sus edades de 10 años) pertenecientes y al estrato socioeconómico bajo y medio que cursan el cuarto grado de primaria en la institución educativa de carácter privado Reina de la Paz.

Antes de mostrar la metodología del cálculo del tamaño de la muestra (réplicas), se ven los principios básicos de un diseño experimental:

1. Replicaciones de algunos o todos los tratamientos para estimar la magnitud del error experimental.

2. Aleatorización de los tratamientos a las unidades experimentales para tener una estimación válida del error experimental, así como estimaciones insesgadas de los efectos de los tratamientos.
3. El uso del control local de fuentes de variación extrañas conocidas a través del uso de subgrupos homogéneos de unidades experimentales.

Haciendo énfasis en el primero de estos principios, surge la preguntar *¿Por qué replicar?* Respondemos desde Steel y Torrie (1997), citados por Díaz (2009):

> La replicación en un diseño tiene cuatro funciones: 1) Permitir una estimación de la varianza del error experimental. 2) Mejorar la precisión de las estimaciones en el experimento. 3) Aumentar el alcance de la inferencia. 4) Ejercer control sobre la varianza del error.

Ahora bien, del número de réplicas depende de realizar buenas estimaciones de las medias de los tratamientos, así como la potencia de los test (ANOVA[2]). En el cálculo del número de réplicas intervienen los siguientes elementos:

1. La varianza σ^2
2. El tamaño de la diferencia que se considera significativa para el investigador.
3. El error tipo I y el error tipo II, este último relacionado con el cálculo de la potencia del test.

Dicho lo anterior, el tamaño de la muestra (número de réplicas (r)) necesario, cuando se contrasta la hipótesis[3] sobre la media poblacional es:

---

[2] Técnica estadística de análisis de varianza utilizada para el análisis de diseños experimentales. Sobre esta técnica se discutirá en el capítulo de análisis de datos.
[3] Hipótesis: $\mu_1 = \mu_0$ donde σ^2 es conocida y μ_0 es un valor de contraste.

$$r = 2[Z_{\alpha/2} + Z_\beta]^2 \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^2,$$ donde:

- $Z_{\alpha\backslash 2}$: es una Variable Aleatoria Estándar (V.A.E) con probabilidad $\alpha\backslash 2$ si es un contraste de dos colas, o α si es un contraste de una cola.
- Z_β: es una V.A.E. con probabilidad β siempre es un contraste de una cola.
- σ: Desviación estándar poblacional.
- δ: Diferencia significativa planteada.

Para nuestra investigación, trabajamos con:

- $\boldsymbol{\alpha = 0,05,}$ lo cual implica que la probabilidad de cometer un error tipo 1 (falso positivo) en el contraste de hipótesis es baja (0,05).
- $\boldsymbol{\beta = 0,10}$, lo cual implica que la sensibilidad del test de contraste de hipótesis es de $0{,}9 = 1 - \beta$
- $\boldsymbol{\delta = 15}$, lo cual implica que se considera significativa la diferencia entre dos puntuaciones cuando esta es igual o mayor a 15. En nuestro caso, se considera significativa cualquier diferencia entre las calificaciones del pres-test y postest cuando esta diferencia sea igual o mayor a 15.
- $\boldsymbol{\sigma = 12}$, lo cual implica que consideramos que la desviación estándar entre las calificaciones obtenidas en el pretest y pos-test es de 12 puntos.
- $r = 2[Z_{\alpha/2} + Z_\beta]^2 \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^2 = 2\left[1{,}645 + 1{,}285\right]^2 \left(\frac{12}{15}\right)^2 = 10.98$

En el Anexo 3 presentamos la tabla de probabilidades de la distribución normal estándar cuyos valores se utilizan en la fórmula para el cálculo de número de réplicas.

En conclusión, el tamaño muestral (número de réplicas) necesario por tratamiento es aproximadamente 10 para cada grupo, experimental y control, lo cual implica que nuestro tamaño muestral es de 20 estudiantes aproximadamente. Así que, para el desarrollo de nuestra investigación, seleccionamos 21[4] estudiantes del grado cuarto. A continuación, se presenta el esquema de universo, población y muestra.

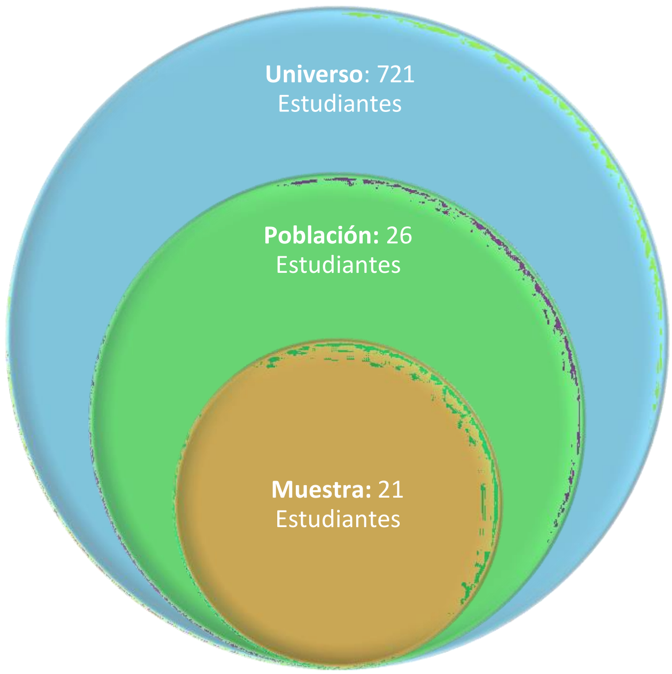


Figura 5. Esquema universo, población y muestra.
Elaboración propia.

[4] Se tomó una muestra de 21 estudiantes, que se distribuyeron así: dos grupos de 10 estudiantes y un estudiante como una unidad experimental de reposición en caso que algunos de los estudiantes durante el pretest abandonaran la investigación. Durante este proceso investigativo no se pudo contar con toda la población bajo estudio (26 estudiantes de cuarto grado) pues 5 niños presentaban constantes inasistencias al colegio, lo cual perjudicaba el proceso investigativo generando a partir de estas inasistencias información sesgada.

3.4 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

3.4.1 Fases

3.4.1.1 Pretest: realizamos una medición inicial mediante una prueba escrita presencial, llamada *pretest*, la cual contenía nueve problemas geométricos, tomados del Nivel 1 de diferentes Calendarios Matemáticos del Proyecto Colombia Aprendiendo. Este pretest fue aplicado antes de la intervención pedagógica la cual constituyó el proceso experimental.

3.4.1.2 Intervención pedagógica: la realizamos en un periodo de 15 semanas; las actividades ejecutadas con los estudiantes fueron: prueba pretest (15 horas), talleres de resolución de problemas geométricos de tipo 1 (5 horas), talleres de resolución de problemas geométricos de tipo 2 (5 hora), talleres de resolución de problemas geométricos de tipo 3 (5 horas), y postest (15 horas). Es decir, cada uno de los estudiantes fue sometido a un proceso de enseñanza de geometría por un periodo de 30 horas; clases que fueron distribuidas en 15 sesiones de 2 horas. Cabe señalar que se contó con el consentimiento de los padres de familia de los estudiantes para su respectiva participación en esta investigación (véase el Anexo 4).

Factores tales como tipo de salón, tipo de sillas, ruido, temperatura, intensidad de luz y horario que pudieron incidir o tener efecto sobre la variable respuesta estuvieron controlados, pues el proceso experimental con los dos subgrupos de estudiantes lo realizamos en la institución, bajo las mismas condiciones para cada uno de los factores descritos anteriormente. Cabe señalar que los salones de clase de la Institución Educativa Reina de La Paz cuentan con un espacio amplio, iluminado, con excelente ventilación, herramientas tecnológicas (videobeam, computador y bafle), un tablero acrílico, a cada estudiante se le asignó un escritorio y silla, dentro del salón de clase que cuenta con un baño.

Dada la amplitud del salón y la practicidad del mobiliario, inicialmente los dos subgrupos realizaron las actividades de manera simultánea en el mismo salón, aplicando los dos tratamientos. No obstante, una vez experimentada la limitación de desarrollar las dos metodologías en simultaneo, nos vimos en la necesidad de separarlos, ubicándolos en salones diferentes (el estar juntos, generó en los estudiantes curiosidad, desorden y en algunas ocasiones problemas de convivencia ya que frecuentemente mostraban interés por lo que se orientaba en el grupo experimental).

El factor “tipo de profesor” también lo controlamos pues, durante el proceso de experimentación, los estudiantes recibieron el efecto de las dos profesoras (profesoras-investigadoras) ya que nos intercalamos por sesiones como profesoras en cada uno de los subgrupos de estudiantes.

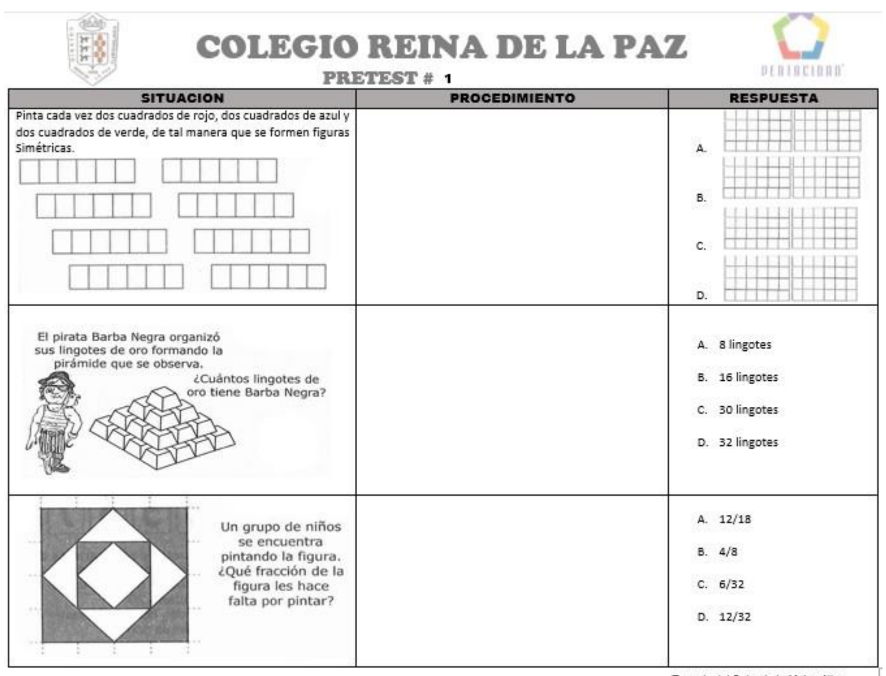
3.4.1.3 Postest: Realizamos una medición final mediante una prueba escrita presencial, llamada *postest*, que contenía nueve problemas geométricos tomados del material didáctico que concierne a nuestra investigación. El postest fue aplicado al final del proceso experimental.

3.4.2 Instrumentos de medición

Para la construcción de los instrumentos de medición se seleccionaron ítems (problemas geométricos) de forma adecuada de un banco de 39 ítems tomados de CalMat de años anteriores;

la selección de estos la realizamos bajo el criterio de obtener un pretest y un pos-test válido y confiable.

Cada uno de los instrumentos de medición contiene nueve problemas de selección múltiple con única respuesta: tres problemas tipo1, tres problemas tipo 2 y tres problemas tipo 3. Adicional, diseñamos en la prueba una columna llamada *procedimiento* donde se pretendió que el estudiante escribiera una justificación o proceso a la solución de cada problema. Como valor agregado, y para aproximar el diseño los dos test a la prueba Saber, cada problema se convirtió en un problema de selección múltiple con única respuesta, por lo que en el diseño de cada test se añadió otra columna donde se encuentran las cuatro opciones de selección múltiple que, además, facilitaron el análisis cuantitativo; en la Figura 6 se ilustra un ejemplo del pretest 1 (en el Anexo 5 se presenta tanto el pretest como el postest).



COLEGIO REINA DE LA PAZ

PRETEST # 1

SITUACION	PROCEDIMIENTO	RESPUESTA
Pinta cada vez dos cuadrados de rojo, dos cuadrados de azul y dos cuadrados de verde, de tal manera que se formen figuras Simétricas.		A. B. C. D.
El pirata Barba Negra organizó sus lingotes de oro formando la pirámide que se observa. ¿Cuántos lingotes de oro tiene Barba Negra?		A. 8 lingotes B. 16 lingotes C. 30 lingotes D. 32 lingotes
Un grupo de niños se encuentra pintando la figura. ¿Qué fracción de la figura les hace falta por pintar?		A. 12/18 B. 4/8 C. 6/32 D. 12/32

Tomado del Calendario Matemático

Figura 6. Muestrario de uno de los tres pretest.

Debido a la organización horaria de la institución educativa, era inadecuado presentar a los estudiantes los nueve (9) problemas de cada test en un solo instante. Por tanto, cada uno de los instrumentos de medición fue fraccionado en tres partes y aplicado en tres momentos diferentes tanto en el pretest como en el postest.

Ahora, los problemas que constituyeron cada instrumento responden a una tipificación realizada a priori. Si bien, inicialmente, la tipificación de los problemas para el Nivel 1 del Calendario Matemático iba del 1 al 4, esta se refinó de 1 a 3 tras la revisión de la misma por los expertos (se colapsaron los Tipo 3 y 4 para obtener lo que es ahora el Tipo 3[5]). Se tiene, entonces, que:

Un **problema es de Tipo 1** si la situación requiere:

• Identificar la información necesaria para hallar su solución ya que está de manera directa y clara.

•Comprender fácilmente el tipo de respuesta que se espera.

• Reconocer objetos geométricos en dos dimensiones.

• Usar los números naturales para codificar, contar o medir.

• Usar de conocimiento geométrico básico.

• Usar las transformaciones en el plano (rotación, traslación, simetría)

• Construir o descomponer figuras planas a partir de condiciones dadas.

[5] En el Anexo 3 se puede apreciar la tipificación inicial.

***Un* problema es de Tipo 2** si, además de lo descrito en el de Tipo 1, el problema exige:

• Reconocer figuras geométricas en superposición o figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños.

•Usar atributos y propiedades de los objetos geométricos.

• Construir o descomponer sólidos a partir de condiciones dadas.

***Un* problema es de Tipo 3** si, además de lo descrito en el de Tipo 1 y 2, el problema exige:

•Realizar deducciones con la información dada.

•Hacer manipulaciones aritméticas y establecer relaciones numéricas

•Usar y aplicar reglas, conceptos y propiedades de los objetos geométricos.

•Crear o interpretar a una representación geométrica bidimensional o tridimensional.

•Comparar y ordenar objetos respecto a atributos medibles.

•Abstraer y representar mentalmente objetos tridimensionales.

•Hacer manipulaciones algebraicas sencillas.

•Usar otros conceptos matemáticos no mencionados explícitamente en el problema.

•Identificar patrones y regularidades

•Reflexionar sobre los procesos que se necesitan o se emplean en la solución del problema.

•Comprender y manejar conceptos matemáticos en contextos que sean nuevos o complejos.

•Realizar demostraciones.

3.4.2.1 Escala de calificación: El sistema de evaluación de los test lo asumimos de manera similar a la Institución Educativa Reina de la Paz y la que usa el ICFES en la prueba Saber: una escala de calificación cuantitativa y ascendente de 0 a 100 puntos; para nuestra investigación, 0 que no hubo ninguna solución correcta y 100 que todas las soluciones fueron correctas.

3.4.3 Validación de los instrumentos de medición

3.4.3.1 Validez: La validez de los instrumentos la evaluamos a través del juicio por expertos, (cuatro docentes-investigadores del área de matemáticas), quienes clasificaron y dieron una valoración de cada uno de los ítems que intentan medir las competencias matemáticas que el estudiante posee al resolver problemas geométricos.

Al momento de la validación, los expertos contaban con estudios de pregrado de licenciatura en matemáticas y maestría en educación matemática o similar, trabajaban en establecimientos públicos y privados a nivel de primaria, secundaria y universitaria. A estos docentes se les envió el Formato de Validación (ver Anexo 6) y los 39 ítems para que los clasificaran de acuerdo a los criterios de la tipificación en Tipo 1, Tipo 2 o Tipo 3.

Dado el número de expertos con los que se contó en el proceso de validación, utilizamos el indicador modificado del modelo de Lawshe, CVR´ (Tristán-López, 2008) para evaluar la validez de los instrumentos de medición, pretest y postest. El Indicador CVR´ se presenta a continuación:

$$\boldsymbol{CVR'} = \frac{\boldsymbol{n_e}}{\boldsymbol{N}}$$

donde:

n_e =Número de panelistas que tienen acuerdo en la categoría
N = Número total de panelistas

Con respeto a los valores que toma el indicador CVR', presentamos en la Tabla 5 los valores mínimos de CVR' que debe tener un ítem para ser validado y, por tanto, ser utilizado en el test en función del número de acuerdos y número de expertos.

Tabla 5.
Tabla de valores mínimos de CVR'

Panelistas	Acuerdos en "esencial"	No acuerdos	r	CVR'
2	2	0	1.00	1.00
3	2	1	0.33	0.67
4	3	1	0.50	0.75
5	3	2	0.20	0.60
6	4	2	0.33	0.67
7	5	2	0.43	0.71
8	5	3	0.25	0.63

Fuente: Adaptada de Tristán-López (2008, p. 43).

En el Anexo 7 presentamos los valores del CVR´ calculados para los 39 ítems evaluados por los expertos, descartando ocho de estos. Una vez calculados el CVR´ para cada uno de los ítems, procedimos a calcular el Índice de Validez de Contenido (CVI), propuesto por Lawshe, el cual nos permitió calcular la validez de todo el conjunto de ítems (problemas), es decir, la validez del instrumento de medición. Consideramos **aceptable** el conjunto de problemas o instrumento de medición si su CVI es superior a 0,58; en palabras de Tristán-López (2008): "para que un instrumento o un banco de ítems pueda considerarse como aceptable, requiere contar por lo menos con un 58% de los ítems en condición satisfactoria del CVR' ". A continuación, presentamos los cálculos CVI de los ítems que hicieron parte del pretest y postest:

$$CVI = \frac{\sum_{i=1}^{n} CVR'_i}{n} = \frac{26,25}{31} = 0,8467$$

Dado a que el CVI > 0,58, consideramos el instrumento de medición construido bajo estos ítems como aceptable y, por tanto, aseguramos que posee validez de contenido.

3.4.3.2 Confiabilidad. La confiabilidad de la prueba fue medida a través del indicador "alfa de Cronbach" el cual mide la consistencia interna de un instrumento de medición, en nuestro caso el pretest y el postest. La confiabilidad de la consistencia interna medida a través del alfa de Cronbach asume que un conjunto de ítems mide un mismo constructo, idea o variable latente y, por tanto, debe existir entre este conjunto de ítems una correlación alta. El alfa de Cronbach reporta valores entre 0 y 1 que, a criterio de varios investigadores, se les puede dar la siguiente interpretación:

Tabla 6.

Interpretación del alfa de Cronbach.

Coeficiente de Cronbach	Confiabilidad del Instrumento
>0.9	Excelente
>0.8	Buena
>0.7	Aceptable
>0.6	Cuestionable
>0.5	Pobre
<0.5	Inaceptable

Fuente: Adaptada por George y Mallery (2003, p. 231).

Del grupo de 31 ítems que cumplieron con el criterio de validez, seleccionamos dos grupos de nueve ítems que cumplieran con la confiabilidad del test. A continuación, presentamos la estadística alfa de Cronbach para los ítems que conformaron el pretest y postest:

a. **Alfa de Cronbach para el pretest.** los nueve ítems poseen un alfa de Cronbach de 0,7 lo cual indica que la confiabilidad del pretest es aceptable (véase la Tabla 7).

Tabla 7.

Valor de alfa de Cronbach pretest.

Alfa de Cronbach	N° de elementos
0,7	9

Fuente: Estadísticos de fiabilidad.

b. Alfa de Cronbach para el postest. El postest con los nueve ítems posee un alfa de Cronbach de 0,854 lo cual refleja una buena confiabilidad (véase la Tabla 8).

Tabla 8.

Alfa de Cronbach postest.

Alfa de Cronbach	N° de elementos
0,8	9

Fuente: Estadísticos de fiabilidad.

Finalmente, una vez obtenidos los dos instrumentos de medición, pretest y postest, estos fueron aplicados en sus correspondientes fases.

3.5 Técnicas para el procesamiento de datos

Los datos recopilados en esta investigación fueron analizados desde los enfoques estadísticos, descriptivos e inferencial: (a) desde el enfoque estadístico descriptivo, consideramos diagramas de barras, cajas y bigotes, cálculo de medidas de tendencia central y medidas de dispersión; (b) desde el enfoque estadístico inferencial, utilizamos ANOVA paramétrico, ANOVA no paramétrico, contraste de medias para poblaciones independientes. Las técnicas estadísticas inferenciales, mencionadas anteriormente, permitieron contrastar las siguientes hipótesis estadísticas, la cuales están en sintonía con los objetivos específicos planteados.

Las hipótesis nulas a contrastar son:

- μ_0: El valor medio de las calificaciones para los problemas tipo 1 del GC es el mismo que el valor medio de las calificaciones del GE
- μ_0': El valor medio de las calificaciones para los problemas tipo 2 del GC es el mismo que el valor medio de las calificaciones del GE.
- μ_0'': El valor medio de las calificaciones para los problemas tipo 3 del GC es el mismo que el valor medio de las calificaciones del GE.
- μ_0''': El valor medio de la calificación total del GC es el mismo que el valor medio de la calificación del GE.

Versus sus correspondientes hipótesis alternativas:

- μ_a: El valor medio de las calificaciones para los problemas tipo 1 del grupo Experimental es mayor que el valor medio de las calificaciones del grupo Control.
- .μ_a': El valor medio de las calificaciones para los problemas tipo 2 del grupo Experimental es mayor que el valor medio de las calificaciones del grupo Control.
- μ_a'': El valor medio de las calificaciones para los problemas tipo 3 del grupo Experimental es mayor que el valor medio de las calificaciones del grupo Control.
- μ_a''': El valor medio de la calificación total del grupo Experimental es mayor que el valor medio de la calificación del grupo Control.

Finalmente, para la organización, procesamiento y análisis de la información contamos con el software Estadístico SPSS 22 y la hoja de cálculo de Excel.

Capítulo 4

PRESENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Presentación y análisis de datos

A continuación, presentamos el análisis de los datos obtenidos del pretest desde dos enfoques estadísticos: el descriptivo y el inferencial; el primero de ellos para hacer una exploración de los datos y encontrar indicios sobre la homogeneidad de las variables; el segundo de ellos, para encontrar evidencia estadística sobre la homogeneidad.

Tabla 9.

Variables, hipótesis nula y alternativas de la investigación para los pretest.

VARIABLES	HIPÓTESIS NULAS	HIPÓTESIS ALTERNATIVAS
• Puntaje promedio obtenido en los pretest 1, 2 y 3 para problemas geométricos tipo 1 (P1_PRE).	• μ_0: El valor promedio de P1_PRE en el grupo Experimental = El valor promedio de P1_PRE en el grupo control.	• μ_a: El valor promedio de P1_PRE en el grupo Experimental ≠ El valor medio de P1_PRE en el grupo control.
• Puntaje promedio obtenido en los pretest 1, 2 y 3 para problemas geométricos tipo 2 (P2_PRE).	• μ'_0: El valor promedio de P2_PRE en el grupo Experimental = El valor promedio de P2_PRE en el grupo control.	• μ'_a: El valor promedio de P2_PRE en el grupo Experimental ≠ El valor medio de P2_PRE en el grupo control.
• Puntaje promedio obtenido en los pretest 1, 2 y 3 para problemas geométricos tipo 3 (P3_PRE)	• μ''_0: El valor promedio de P3_PRE en el grupo Experimental = El valor promedio de P3_PRE en el grupo control.	• μ''_a: El valor promedio de P3_PRE en el grupo Experimental ≠ El valor medio de P3_PRE en el grupo control.
• Puntaje total obtenido en el pretest 1, 2 y 3 (PTPRE)	• μ'''_0: El valor promedio de PTPRE en el grupo Experimental = El valor promedio de PTPRE en el grupo control.	• μ'''_a: El valor promedio de PTPRE en el grupo Experimental ≠ El valor medio de PTPRE en el grupo control.

Cabe señalar que presentamos el análisis de los resultados derivados del proceso experimentación así: en una primera parte presentamos el análisis de los resultados del prestest y, seguido, a este el análisis de los resultados del postest.

4.1.1 **Análisis descriptivo los *datos pretest***

4.1.1.1 Estadísticas descriptivas para *P1_PRE.* Presentamos en la Tabla 10 la estadística descriptiva para la variable Promedio P1_PRE.

Tabla 10.
Estadísticas Descriptivas para Promedio P1_PRE.

Grupo	Experimental	Media	52,12
		Desviación estándar	18,09
		Máximo	80,00
		Mínimo	23,33
	Control	Media	46,33
		Desviación estándar	18,89
		Máximo	76,67
		Mínimo	23,33

Fuente: Elaborada por las investigadoras.

De la tabla deducimos que el valor promedio de la variable en el grupo experimental es mayor que el grupo control, excediendo a este último en seis puntos. En cuanto a la variabilidad, observamos que los dos grupos (experimental y control) poseen dispersiones muy similares, esto se ve reflejado en los valores de sus desviaciones estándar (18,09 y 18,89). Por otro parte, en cuanto a valores máximos y mínimos, el valor mínimo que toma la variable es similar en los dos grupos, el mayor valor máximo de la variable lo posee el grupo experimental.

4.1.1.2 Estadísticas descriptivas para P2_PRE.

La Tabla 11 presenta las estadísticas descriptivas para la variable Promedio P2_PRE. Notamos que el valor promedio de la variable en el grupo control es mayor que en el experimental, excediendo a este último en siete puntos.

Tabla 11.
Estadísticas Descriptivas para Promedio P2_PRE.

Grupo	Experimental	Media	78,48
		Desviación estándar	23,82
		Máximo	100,00
		Mínimo	40,00
	Control	Media	85,67
		Desviación estándar	11,23
		Máximo	100,00
		Mínimo	70,00

Fuente: Elaborada por las investigadoras.

En cuanto a la variabilidad, se puede observar que los dos grupos (control y experimental) poseen diferentes dispersiones, esto se ve reflejado en los valores de sus desviaciones estándar (11,23 y 23,82), por tanto, el comportamiento de la variable es más homogéneo en el grupo control.

Respecto a valores máximos y mínimos, el valor máximo que toma la variable es aproximadamente similar en los dos grupos y el menor de los valores mínimos de la variable lo posee el grupo experimental.

4.1.1.3 Estadísticas descriptivas para P3_PRE

La Tabla 13 presenta las estadísticas descriptivas para la variable Promedio P3_PRE.

Tabla 12.

Estadísticas Descriptivas para Promedio P3_PRE

Grupo	Experimental	Media	52,73
		Desviación estándar	22,89
		Máximo	83,33
		Mínimo	10,00
	Control	Media	53,00
		Desviación estándar	23,33
		Máximo	100,00
		Mínimo	10,00

Fuente: Elaborada por las investigadoras.

Como se puede observar de la tabla anterior, el valor promedio de la variable, el valor mínimo y su dispersión es aproximadamente similar en los dos grupos. Y el mayor valor máximo de la variable lo posee el grupo control.

4.1.1.4 Estadísticas Descriptivas para PTPRE.

Tabla 13.

Estadísticas Descriptivas para Puntaje Total Pretest.

Grupo	Experimental	Media	60,33
		Desviación estándar	18,15
		Máximo	87,67
		Mínimo	27,67
	Control	Media	61,47
		Desviación estándar	15,07
		Máximo	87,33
		Mínimo	34,00

Fuente: Elaborada por las investigadoras.

Observamos que el valor medio de la variable es aproximadamente similar en los dos grupos. En cuanto a la variabilidad, los dos grupos (experimental y control) poseen diferentes dispersiones, esto se ve reflejado en los valores de sus desviaciones estándar (18,15 y 15,07). Por tanto, el comportamiento de la variable es más homogéneo en el grupo control.

En cuanto a valores máximos y mínimos, el valor máximo que toma la variable es aproximadamente similar en los dos grupos y el menor valor mínimo de la variable lo posee el grupo experimental.

4.1.1.5 Análisis de la distribución del puntaje promedio P1_PRE, P2_PRE, P3_PRE y PTPRE en GE y GC.

La Figura 7 y la Figura 8 permiten ver la distribución de la variable puntaje promedio para los problemas tipo 1, 2, 3 y Puntaje Total en los grupos experimental y control.

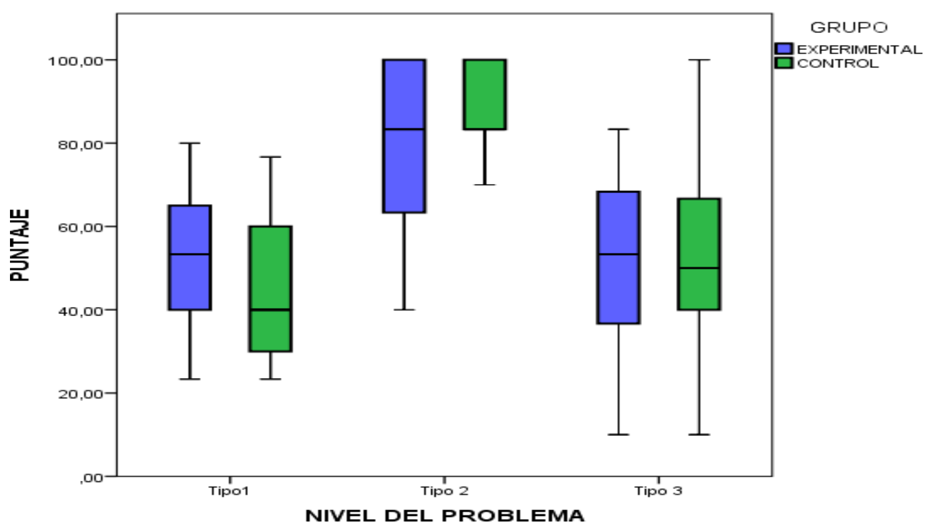


Figura 7. Diagrama de Cajas y Bigotes para puntaje promedio P1_PRE, P2_PRE y P3_PRE en grupo Experimental y Control.

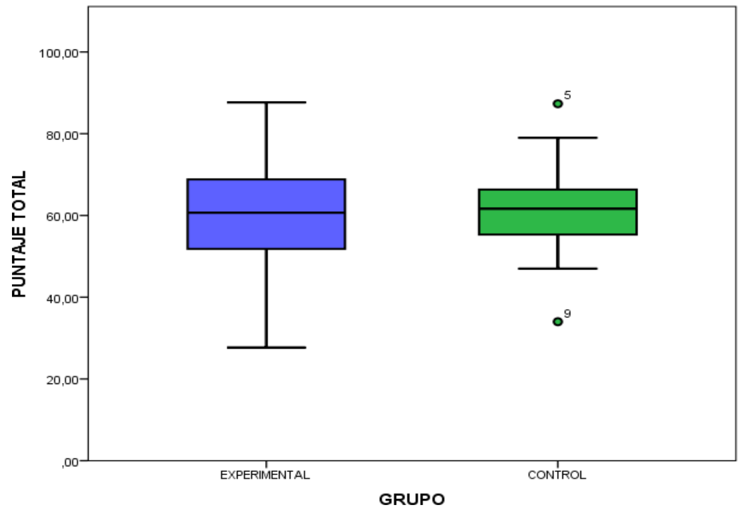


Figura 8. Diagrama de Cajas y Bigotes para puntaje promedio PTPRE
en el grupo experimental y control.

Al observar la distribución de los puntajes del desarrollo de los problemas tipo 1 podemos ver una diferencia entre la mediana del grupo experimental y el grupo control, siendo la mediana de este último mayor que la del primero. Sin embargo, la distribución presentada por esta variable es muy similar en los dos grupos pues el rango (distancia entre el mínimo valor y el máximo) es levemente diferente en los dos grupos y, además, como se puede observar, la concentración del 50% de los datos entre el primer cuartil y el tercero cuartil se solapa.

Lo anterior nos permitió evidenciar que el nivel de competencia para resolver problemas tipo 1 era muy similar en los dos grupos antes del proceso experimental. Por otra parte, al observar los puntajes del desarrollo de los problemas tipo 2, podemos constatar que el rango de los puntajes en el grupo experimental es más amplio que el rango del grupo control, no obstante, se puede observar que la distribución de los puntajes del grupo control está contenida dentro de la distribución de los datos del grupo experimental esto nos permite evidenciar que el 100% de los puntajes del grupo control son similares en, por lo menos, 50% de los puntajes del grupo experimental mostrando así entre ellos una mediana similitud. El anterior análisis nos permitió evidenciar que el nivel de competencia para resolver problemas tipo 2 era medianamente similar en los dos grupos antes del proceso experimental. Finalmente, como se observa en la Figura 7, la distribución de los puntajes del desarrollo de los problemas tipo 3 es muy similar en los grupos experimental y control, por tanto, esto evidencia el nivel de competencia para resolver problemas tipo 3 era muy similar en los dos grupos antes del proceso experimental.

Con respecto a los puntajes totales encontrados en el pretest, podemos visualizar en la Figura 8, que el 100% de los puntajes del grupo control están contenidos, en por lo menos un 50%, dentro de los puntajes del grupo experimental, dejando ver de esta manera, una similitud en el comportamiento de los mismos en los dos grupos.

Lo anterior, junto con las Tablas 11, 12, 13 y 14 nos permitieron afirmar que el nivel de competencia utilizado por los estudiantes para resolver situaciones problema Tipo 1, 2 y 3 resultó homogéneo, y así cumplir con la condición de contar con una muestra homogénea antes del proceso de experimentación.

4.1.2 Análisis inferencial de los datos pretest

La Tabla 14 deja ver los resultados del test ANOVA[6] para la comparación de medias para los puntajes promedio P1_PRE, P2_PRE y P3_PRE, así como del PT_PRE. De ella se observa el p- valor de cada una de las pruebas (0.482, 0.396, 0.979 y 0.879), los cuales son mayores que el nivel de significación 0,05. Por tanto, no existe suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula que afirma que los puntajes promedio P1_PRE, P2_PRE, P3_PRE y PT_PRE son

[6] En esta investigación usamos el ANOVA para el análisis de los datos, pues es una metodología más robusta que la prueba t-student.

iguales en los grupos experimental y control. Lo anterior, confirma lo mencionado en párrafos anteriores y, por tanto, aseguramos, con un 95% de confianza, que antes de iniciar el proceso experimentación los niveles de competencia para resolver problemas geométricos de los estudiantes de los grupos control y experimental eran estadísticamente iguales y, por tanto, se contó desde el inicio con una muestra homogénea, tal como se requiere en un proceso experimental.

Tabla 14.

ANOVA para P1_PRE, P2_PRE, P3_PRE y PTPRE.

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
P1_PRE	Entre grupos	175,474	1	175,474	,514	,482
	Dentro de grupos	6482,727	19	341,196		
	Total	6658,201	20			
P2_PRE	Entre grupos	270,173	1	270,173	,754	,396
	Dentro de grupos	6809,192	19	358,379		
	Total	7079,365	20			
P3_PRE	Entre grupos	,390	1	,390	,001	,979
	Dentro de grupos	10139,293	19	533,647		
	Total	10139,683	20			
PTPRE	Entre grupos	6,728	1	6,728	,024	,879
	Dentro de grupos	5339,156	19	281,008		
	Total	5345,884	20			

Fuente: Elaborada por las investigadoras.

4.1.2.1 Validación de Supuestos del Análisis ANOVA. Como es sabido, una vez realizado el análisis ANOVA paramétrico, es necesario validar cada uno de sus supuestos, entre los cuales tenemos, la normalidad de los residuos y la homocedasticidad de la varianza y, de esta forma, dar validez a los hallazgos y conclusiones derivados del mismo.

Con respecto a la normalidad, el análisis ANOVA paramétrico es robusto, lo cual quiere decir que su validez se ve poca afectada por el cumplimiento parcial del mismo; sin embargo, el

ANOVA si se ve seriamente afectado por el no cumplimiento de la homogeneidad de la varianza. A continuación, presentamos las pruebas de validación de estos dos supuestos, así como la solución al incumplimiento de uno de estos.

Tabla 15.

Prueba de Normalidad para Residuos de P1_PRE, P2_PRE, P3_PRE, y PTPRE

	Hipótesis nula	Prueba	Sig.	Decisión
1	La distribución de Residuo para P1_PRE es normal con la media 0,000 y la desviación estándar 18,18.	Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra	,043[1]	Rechace la hipótesis nula.
2	La distribución de Residuo para P2_PRE es normal con la media 0,000 y la desviación estándar 18,19.	Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra	,019[1]	Rechace la hipótesis nula.
3	La distribución de Residuo para P3_PRE es normal con la media 0,000 y la desviación estándar 21,05.	Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra	,200[1,2]	Conserve la hipótesis nula.
4	La distribución de Residuo para PTPRE es normal con la media 0,000 y la desviación estándar 15,53.	Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra	,200[1,2]	Conserve la hipótesis nula.

Se muestran significaciones asintóticas. El nivel de significancia es ,05.

[1] Lilliefors corregido

[2] Este es un límite inferior de la verdadera significancia.

La Tabla 15 deja ver las pruebas de normalidad para las variables P1_PRE, P2_PRE, P3_PRE y PTPRE; como se observa, los p-valor (0.043 y 0.019) del test de hipótesis de normalidad de los residuos de P1_PRE y P2_PRE son menores que el nivel de significación 0.05. Por tanto, rechazamos la hipótesis nula que afirma que los residuos de las variables poseen una distribución normal.

Por otra parte, la Tabla 16 deja ver el test de homogeneidad; cómo se puede observar en esta, los p-valor del test de Levene (0.776, 0.712, 0.995, 0.890), para cada una de las variables son mayores que el nivel de significación 0.05, por tanto, no existe suficiente evidencia estadística para rechazar la homocedasticidad de la varianza de las variables.

Tabla 16.

Prueba de homocedasticidad de varianzas.

	Estadístico de Levene	df1	df2	Sig.
P1_PRE	,083	1	19	,776
P2_PRE	,140	1	19	,712
P3_PRE	,000	1	19	,995
PTPRE	,020	1	19	,890

Como se observó anteriormente, la normalidad para los residuos de P1_PRE y P2_PRE no fue validada; sin embargo, aunque el ANOVA paramétrico es robusto frente al cumplimiento parcial de la normalidad se decidió realizar el ANOVA no paramétrico Kruskal-Wallis para confirmar los resultados y análisis presentados en la Tabla 14 y de esta forma dar validez a los mismos.

La Tabla 17 deja ver los resultados del test ANOVA no paramétrico para las variables P1_PRE, P2_PRE, P3_PRE y PTPRE; como se observa, los p-valor (0.434, 0.659, 0.0887 y 0.972) son mayores que el nivel de significación 0.05. Esto indica que no existe suficiente evidencia estadística para rechazar las hipótesis nulas, lo que significa, que antes de iniciar el proceso experimentación los niveles de competencia para resolver problemas geométricos de los estudiantes de los grupos control y experimental eran estadísticamente iguales y, por tanto, contamos desde un inicio con una muestra homogénea tal como se requiere en un proceso experimental. Lo anterior confirma el análisis realizado en la Tabla 14. El Anexo 8 contiene información adicional del test de *Kruskall-Wallis.*

Tabla 17.

ANOVA no paramétrico para P1_PRE, P2_PRE, P3_PRE y PTPRE.

Resumen de contrastes de hipótesis

	Hipótesis nula	Prueba	Sig.	Decisión
1	La distribución de P1_PRE es la misma entre las categorías de GRUPO.	Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes	,434	Conserve la hipótesis nula.
2	La distribución de P2_PRE es la misma entre las categorías de GRUPO.	Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes	,659	Conserve la hipótesis nula.
3	La distribución de P3_PRE es la misma entre las categorías de GRUPO.	Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes	,887	Conserve la hipótesis nula.
4	La distribución de PTPRE es la misma entre las categorías de GRUPO.	Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes	,972	Conserve la hipótesis nula.

Se muestran significaciones asintóticas. El nivel de significancia es ,05.

Fuente: Elaborada por las investigadoras.

Los anteriores resultados nos permiten asegurar que el nivel de competencia para resolver problemas geométricos de cada uno de los grupos experimental y control antes de implementar las metodologías de enseñanzas tradicional y experimental era el mismo y, por tanto, al finalizar el experimento si se observaran diferencias significativas entre los grupos, estas se deberían al tipo de enseñanza impartida y no a diferencias subyacentes entre ellos.

4.2 Análisis de los datos postest

A continuación, se presenta los resultados del análisis del postest; en la Tabla 18 se refrescan las variables, hipótesis nulas e hipótesis alternativas correspondientes.

Tabla 18.

Variables, hipótesis nulas e hipótesis alternativas para los postest.

Variables	Hipótesis nulas	Hipótesis alternativas
• Puntaje promedio obtenido en los postest 1, 2 y 3 para problemas geométricos tipo 1 (P1_POS). • Puntaje promedio obtenido en los postest 1, 2 y 3 para problemas geométricos tipo 2 (P2_POS). • Puntaje promedio obtenido en los postest 1, 2 y 3 para problemas geométricos tipo 3 (P3_POS) • Puntaje total obtenido en el postest 1, 2 y 3 (PTPOS)	• μ_0: El valor promedio de P1_POS en el grupo Experimental = El valor promedio de P1_POS en el grupo control. • μ'_0: El valor medio de P2_POS en el grupo Experimental = El valor promedio de P2_POS en el grupo control. • μ''_0: El valor promedio de P3_POS en el grupo Experimental = El valor promedio de P3_POS en el grupo control. • μ'''_0: El valor promedio de PTPOS en el grupo Experimental = El valor promedio de PTPOS en el grupo control.	• μ_a: El valor promedio de P1_POS en el grupo Experimental ≠ El valor promedio de P1_POS en el grupo control. • μ'_a: El valor promedio de P2_POS en el grupo Experimental ≠ El valor promedio de P2_POS en el grupo control. • μ''_a: El valor promedio de P3_POS en el grupo Experimental ≠ El valor promedio de P3_POS en el grupo control. • μ'''_a: El valor promedio de PTPOS en el grupo Experimental ≠ El valor promedio de PTPOS en el grupo control.

4.2.1. Análisis descriptivos de los datos postest

4.2.1.1 Estadísticas descriptivas para P1_POS.

La Tabla 19 presenta las estadísticas descriptivas para la variable Promedio P1_POS. Como se podrá observar, el valor promedio de la variable en el grupo experimental es mayor que el grupo control, excediendo a este último en más de 18 puntos. En cuanto a la variabilidad, el grupo control presenta una mayor dispersión (9,36) con respecto al grupo experimental (6,20).

Tabla 19.

Estadísticas Descriptivas para Promedio P1_POS.

			P1_POS
Grupo	Experimental	Media	88,79
		Máximo	96,67
		Mínimo	76,67
		Desviación estándar	6,20
	Control	Media	70,33
		Máximo	83,33
		Mínimo	56,67
		Desviación estándar	9,36

Fuente: Elaborada por las investigadoras.

Por otra parte, en cuanto a valores máximos y mínimos: el mayor valor máximo lo posee el grupo experimental con un 96,67 con respecto a un 83,33 del grupo control; y, el menor valor mínimo lo posee el grupo control con un 56,67 frente a un 76,67 del grupo experimental.

4.2.1.2 Estadísticas descriptivas para P2_POS. La Tabla 20 presenta las estadísticas descriptivas para la variable Promedio P2_POS.

Tabla 20.

Estadísticas Descriptivas para Promedio P2_POS.

			P2_POS
Grupo	Experimental	Media	96,67
		Máximo	100,00
		Mínimo	86,67
		Desviación estándar	5,16
	Control	Media	78,33
		Máximo	96,67
		Mínimo	63,33
		Desviación estándar	9,59

Fuente: Elaborada por las investigadoras.

De la Tabla 20 tenemos que el valor promedio de la variable en el grupo experimental es mayor que el grupo control, excediendo a este último en más de 17 puntos. En cuanto a la variabilidad, observamos que el grupo control presenta una mayor dispersión (9,59) con respecto al grupo experimental (5,16). Respecto a los valores máximos y mínimos: el mayor valor máximo lo posee el grupo experimental (100 con respecto al del grupo control con 96,67); y, el menor valor mínimo lo posee el grupo control (63,33 frente al grupo experimental con 86,67).

4.2.1.3 Estadísticas descriptivas para P3_POS. La Tabla 21 presenta las estadísticas descriptivas para la variable Promedio P3_POS. Como se puede observar, el valor promedio de la variable en el grupo experimental es mayor que el grupo control, excediendo a este último aproximadamente en 25 puntos.

Tabla 21.

Estadísticas Descriptivas para Promedio P3_POS

			P3_POS
Grupo	Experimental	Media	95,15
		Máximo	100,00
		Mínimo	83,33
		Desviación estándar	6,21
	Control	Media	70,67
		Máximo	80,00
		Mínimo	56,67
		Desviación estándar	6,81

Fuente: Elaborada por las investigadoras.

En cuanto a la variabilidad, de la tabla advertimos que los dos grupos presentan una dispersión similar. Por otra parte, en cuanto a valores máximos y mínimos: el mayor valor máximo lo posee el grupo experimental (100 con respecto a un 80 del grupo control) y el menor valor mínimo lo posee el grupo control (56,67 frente a un 83,33 del grupo experimental).

4.2.1.4 Estadísticas descriptivas para Puntaje Total Pos-test.

La Tabla 22 presenta las estadísticas descriptivas para la variable Puntaje Total Pos-test.

Tabla 22.

Estadísticas Descriptivas para Puntaje Total Pos-test

			PTPOS
Grupo	Experimental	Media	94,33
		Máximo	99,33
		Mínimo	90,33
		Desviación estándar	2,75
	Control	Media	72,90
		Máximo	80,33
		Mínimo	63,67
		Desviación estándar	5,72

Fuente: Elaborada por las investigadoras.

En este caso, encontramos que el valor promedio de la variable en el grupo experimental es mayor que el grupo control, excediendo a este último en más de 21 puntos. En cuanto a la variabilidad, se puede observar que el grupo control presenta una mayor dispersión (5,72 con respecto al grupo experimental con 2,75). En cuanto a valores máximos y mínimos: el mayor valor máximo lo posee el grupo experimental (94,33 con respecto a un 72,60 del grupo control) y el menor valor mínimo lo posee el grupo control (63,67 frente a un 90,33 del grupo experimental).

4.2.1.5 Análisis de la distribución del puntaje promedio P1_POS, P2_POS y P3_POS en GE y GC. La Figura 9 y la Figura 10 permiten ver la distribución de la variable puntaje promedio para los problemas Tipo 1, 2, 3 y Puntaje Total en los grupos experimental y control.

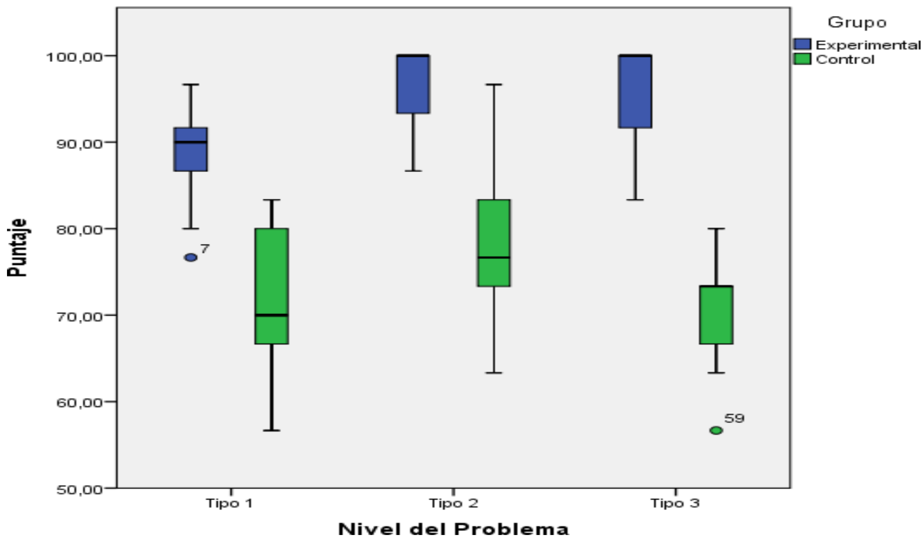


Figura 9. Diagrama de Cajas y Bigotes para puntaje promedio P1_POS, P2_POS y P3_POS en grupo Experimental y Control.

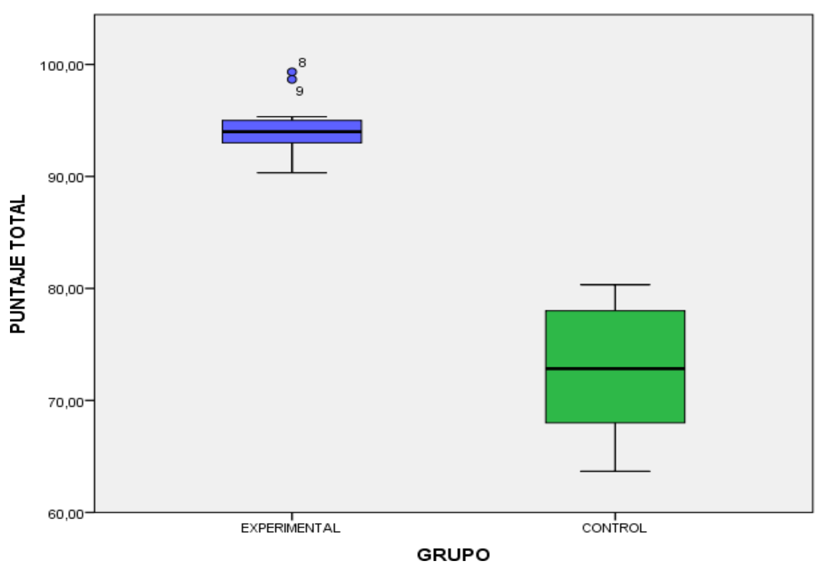


Figura 10. Diagrama de Cajas y Bigotes para puntaje promedio PTPOS en grupo Experimental y Control.

Al observar la distribución de los puntajes del desarrollo de los problemas Tipo 1, 2 y 3, encontramos una diferencia marcada entre el grupo control y experimental, siendo mayores los puntajes de este último en comparación con el primero. Lo anterior, nos brinda evidencias (descriptivas) sólidas para creer que los puntajes del grupo experimentales son superiores al grupo control. Por tanto, podemos argumentar, desde un punto de vista estadístico descriptivo, que la influencia de la metodología del CalMat para la enseñanza en geometría influenció positivamente a los estudiantes del grupo experimental mejorando su nivel de competencia para resolver problemas Tipo 1,2 y 3.

4.2.2 Análisis inferencial de los datos postest

En la Tabla 23 se encuentran los resultados del ANOVA paramétrico para las variables P1_POS, P2_POS, P3_POS y PT_POS.

Tabla 23.

ANOVA para P1_POS, P2_POS, P3_POS y PTPOS.

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
P1_POS	Entre grupos	1783,939	1	1783,939	28,930	,000
	Dentro de grupos	1171,616	19	61,664		
	Total	2955,556	20			
P2_POS	Entre grupos	1760,582	1	1760,582	30,564	,000
	Dentro de grupos	1094,444	19	57,602		
	Total	2855,026	20			
P3_POS	Entre grupos	3140,279	1	3140,279	74,244	,000
	Dentro de grupos	803,636	19	42,297		
	Total	3943,915	20			
PTPOS	Entre grupos	2406,317	1	2406,317	123,638	,000
	Dentro de grupos	369,789	19	19,463		
	Total	2776,106	20			

Fuente: Elaborada por las investigadoras.

Como se observa, los p- valor (0.00) de cada una de las pruebas es menor que el nivel de significación 0,05 lo cual demuestra que existe suficiente evidencia estadística para rechazar las hipótesis nulas, y por tanto, poder afirmar que los puntajes promedio P1_POS, P2_POS, P3_POS y el PTPOS son estadísticamente diferentes en los grupos experimental y control, esto con un nivel de confianza del 95%.

Por otra parte, la Tabla 24 deja ver las estimaciones de los puntajes promedio para las variables P1_POS, P2_POS, P3_POS y PTPOS en los grupos experimental y control.

Tabla 24.

Estadísticas Para la Estimación del Valor Medio Variables. P1_POS, P2_POS, P3_POS Y PTPOS

						95% del intervalo de confianza para la media			
		N	Media	Desviación estándar	Error estándar	Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
P1_POS	EXPERIMENTAL	11	88,7879	6,19547	1,86800	84,6257	92,9501	76,67	96,67
	CONTROL	10	70,3333	9,35579	2,95856	63,6406	77,0261	56,67	83,33
	Total	21	80,0000	12,15639	2,65274	74,4665	85,5335	56,67	96,67
P2_POS	EXPERIMENTAL	11	96,6667	5,16398	1,55700	93,1975	100,1359	86,67	100,00
	CONTROL	10	78,3333	9,59038	3,03274	71,4728	85,1939	63,33	96,67
	Total	21	87,9365	11,94786	2,60724	82,4979	93,3751	63,33	100,00
P3_POS	EXPERIMENTAL	11	95,1515	6,21175	1,87291	90,9784	99,3246	83,33	100,00
	CONTROL	10	70,6667	6,81320	2,15452	65,7928	75,5405	56,67	80,00
	Total	21	83,4921	14,04264	3,06436	77,0999	89,8842	56,67	100,00
PTPOS	EXPERIMENTAL	11	94,3333	2,75278	,82999	92,4840	96,1827	90,33	99,33
	CONTROL	10	72,9000	5,71558	1,80743	68,8113	76,9887	63,67	80,33
	Total	21	84,1270	11,78157	2,57095	78,7641	89,4899	63,67	99,33

Fuente: Elaborada por las investigadoras.

Como se observa, los puntajes promedios para cada una de las variables son mayores en el grupo experimental que en el grupo control.

Al observar la Tabla 23 y la Tabla 24, podemos concluir con un nivel de confianza del 95% que:

- El valor promedio del puntaje de la solución de problemas Tipo 1 oscila entre 84,62 y 92,95 para el grupo experimental en contraste con el grupo control cuyo valor oscila entre 63,64 y 77, 02. En términos puntuales, el valor promedio de la solución de problemas Tipo 1 en el grupo experimental es de 88.78 y en el grupo control 70,33.
- El valor promedio del puntaje de la solución de problemas Tipo 2 oscila entre 93,19 y 100 para el grupo experimental en contraste con el grupo control cuyo valor oscila entre 71,47 y 85,19. En términos puntuales, el valor promedio de la solución de problemas Tipo 1 en el grupo experimental es de 96,66y en el grupo control 78,33.
- El valor promedio del puntaje de la solución de problemas Tipo 2 oscila entre 93,19 y 100 para el grupo experimental en contraste con el grupo control cuyo valor oscila entre 71,47 y 85,19. En términos puntuales, el valor promedio de la solución de problemas Tipo 2 en el grupo experimental es de 96,66y en el grupo control 78,33.
- El valor promedio del puntaje de la solución de problemas Tipo 3 oscila entre 90,97 y 99,32 para el grupo experimental en contraste con el grupo control cuyo valor oscila entre 65,79 y 75,54. En términos puntuales, el valor promedio de la solución de problemas Tipo 3 en el grupo experimental es de 95,15 y en el grupo control 72,90.
- El valor promedio del puntaje total del postest oscila entre 92,48 y 96,48 para el grupo experimental en contraste con el grupo control cuyo valor oscila entre 68,81 y 76,98. En términos puntuales, el valor promedio del puntaje total en el grupo experimental es de 94,33 y en el grupo control 72,90.

4.2.2.1 Validación de Supuestos del Análisis ANOVA

Debido a la naturaleza de los datos, encontramos que la validación de los supuestos de normalidad de residuos no se cumple para la variable P3_POS dado que el p-valor (0,004) es menor que el nivel de significación 0,05. Esto significa que existe suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula que afirma que la variable P3_POS se distribuye normalmente.

Tabla 25.

Contraste de Hipótesis de Normalidad.

Resumen de contrastes de hipótesis

	Hipótesis nula	Prueba	Sig.	Decisión
1	La distribución de Residuo para P1_POS es normal con la media -0,000 y la desviación estándar 7,65.	Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra	,200[1,2]	Conserve la hipótesis nula.
2	La distribución de Residuo para P2_POS es normal con la media -0,000 y la desviación estándar 7,40.	Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra	,064[1]	Conserve la hipótesis nula.
3	La distribución de Residuo para P3_POS es normal con la media 0,000 y la desviación estándar 6,34.	Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra	,004[1]	Rechace la hipótesis nula.
4	La distribución de Residuo para PTPOS es normal con la media 0,000 y la desviación estándar 4,30.	Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra	,200[1,2]	Conserve la hipótesis nula.

Se muestran significaciones asintóticas. El nivel de significancia es ,05.

[1] Lilliefors corregido

[2] Este es un límite inferior de la verdadera significancia.

Por otra parte, encontramos que la homocedasticidad de la varianza no se cumple para la variable PTPOS, dado que el p-valor (0,008) del test de Levene es menor que el nivel de significación 0,05 lo cual significa que existe suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula que afirma que la variable P3_POS es homocedastica. Las anteriores afirmaciones se evidencian en la Tabla 25 (para la normalidad) y en la Tabla 26 (para la homocedasticidad).

Tabla 26.

Homogeneidad de varianzas

	Estadístico de Levene	df1	df2	Sig.
P1_POS	2,692	1	19	,117
P2_POS	1,862	1	19	,188
P3_POS	,004	1	19	,953
PTPOS	8,792	1	19	,008

Fuente: Elaborada por las investigadoras.

Ahora bien, al igual que en el análisis de los resultados del Pretest, decidimos realizar el ANOVA no paramétrico Kruskal-Wallis para confirmar los resultados y análisis presentados en la Tabla 27.

Tabla 27.

ANOVA no paramétrico para P1_POS, P2_POS, P3_POS y PTPOS.

Resumen de contrastes de hipótesis

	Hipótesis nula	Prueba	Sig.	Decisión
1	La distribución de P1_POS es la misma entre las categorías de GRUPO.	Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes	,000	Rechace la hipótesis nula.
2	La distribución de P2_POS es la misma entre las categorías de GRUPO.	Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes	,000	Rechace la hipótesis nula.
3	La distribución de P3_POS es la misma entre las categorías de GRUPO.	Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes	,000	Rechace la hipótesis nula.
4	La distribución de PTPOS es la misma entre las categorías de GRUPO.	Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes	,000	Rechace la hipótesis nula.

Se muestran significaciones asintóticas. El nivel de significancia es ,05.

Como se observa en la Tabla 27, los p-valor (0,000) son menores que el nivel de significación 0,01. Por tanto, existe suficiente evidencia estadística para que rechacemos las hipótesis nulas, lo cual confirma el análisis realizado en las Tablas 24 y 25. El Anexo 7 contiene información adicional del test de *Kruskall-Wallis.*

4.3 Análisis comparativo entre el pretest y postest

Del análisis de la Tabla 28 y la Figura 11 concluimos que las dos metodologías para la enseñanza de la geometría (la tradicional y la del CalMat) influyeron en los niveles de competencia para resolver problemas geométricos Tipo 1: antes del proceso experimental, el puntaje promedio de 46,33 a un 70,33 después del proceso experimental en el grupo control, lo que implica una mejora del 51,8%[7] en los puntajes mientras que el grupo experimental pasó de un puntaje promedio de 52,12 a 88,79, lo que implica una mejora del 70,35 % en los puntajes.

Tabla 28.

Comparación Puntajes promedio de problemas tipo 1 Pretest y Postest.

	Puntajes Promedio Problemas Tipo 1			
	Pretest		Postest	
	Experimental	Control	Experimental	Control
Media	52,12	46,33	88,79	70,33
Des. Estándar	18,09	18,89	6,2	9,36

[7] $Porcentaje\ de\ mejora = \frac{puntaje\ promedio\ postest - puntaje\ promedio\ pretest}{puntaje\ promedio\ pretest} * 100\%$

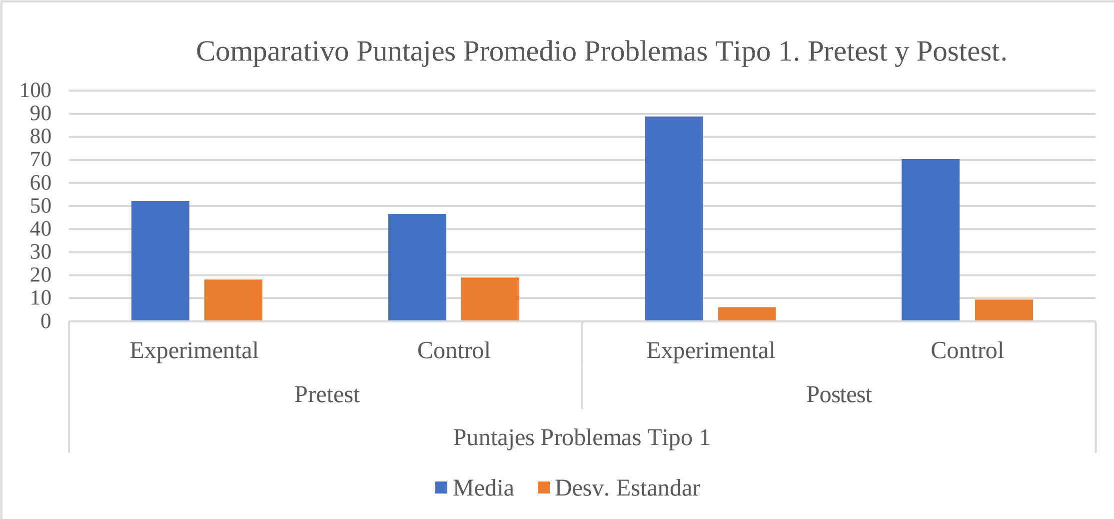


Figura 11. Comparativo Puntajes Promedios de Problemas Tipo 1, pretest y postest.

Por otra parte, podemos ver una reducción de la variabilidad en los puntajes promedio en los dos grupos (grupo experimental de 18,09 a 6,2 y grupo control de 18,89 a 9,36), lo cual significa que las metodologías de enseñanza afectan a la mayoría de los estudiantes permitiendo así resultados más homogéneos.

Contrastando los resultados de los puntajes promedio entre el grupo experimental y el grupo control en el postest, observamos que el grupo experimental obtuvo 18,46 puntos más que el grupo control en la solución de problemas Tipo 1, dejando ver, de esta manera, que la metodología CalMat tuvo un mayor efecto en el mejoramiento de los niveles de competencia para resolver problemas geométricos Tipo 1.

Al analizar la Tabla 29 y la *Figura 12*, observamos que las dos metodologías para la enseñanza de la geometría influyeron en los niveles de competencia para resolver problemas geométricos Tipo 2: el grupo control pasó de un puntaje promedio de 85,67, antes del proceso experimental, a un 78,33, después del proceso experimental, lo que implica una desmejora del

8,56% en los puntajes, mientras que el grupo experimental paso de un puntaje promedio de 78,48 a 96,67, lo que implica una mejora del 23,17 % en los puntajes.

Tabla 29.

Comparación Puntajes promedio de problemas tipo 2 Pretest y Postest.

	Puntajes Problemas Tipo 2			
	Pretest		Postest	
	Experimental	Control	Experimental	Control
Media	78,48	85,67	96,67	78,33
Des. Estándar	23,82	11,23	5,16	9,59

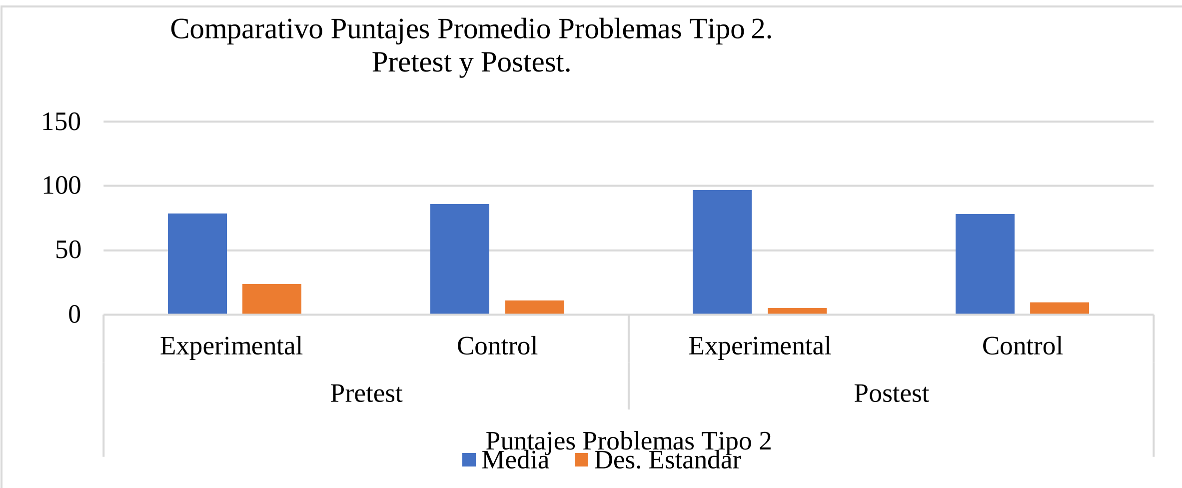


Figura 12. Comparativo Puntajes Promedios de Problemas Tipo 2. Pretest y Postest.

Por otra parte, notamos una reducción de la variabilidad en los puntajes promedio en los dos grupos (grupo experimental de 23,82 a 5,16 y grupo control de 11,23 a 9,59). Además, contrastando los resultados de los puntajes promedio entre el grupo experimental y el grupo control en el postest, observamos que el grupo experimental obtuvo 18,34 puntos más que el grupo control en la solución de problemas Tipo 2, lo cual conduce a que la metodología CalMat tuvo un mayor efecto en el mejoramiento de los niveles de competencia para resolver problemas Tipo 2.

De manera similar, al analizar la Tabla 30 y Figura 13 evidencian que las dos metodologías para la enseñanza de la geometría influyeron en los niveles de competencia para resolver problemas geométricos Tipo 3: el grupo control pasó de un puntaje promedio de 53, antes del proceso experimental, a un 70,67 después del proceso experimental, lo que implica una mejora del 33,33% en los puntajes, mientras que el grupo experimental paso de un puntaje promedio de 52,73 a 95,15, lo que implica una mejora del 80,44 % en los puntajes.

Tabla 30.

Comparación Puntajes promedio de problemas tipo 3 Pretest y Postest.

	Puntajes Problemas Tipo 3			
	Pretest		Postest	
	Experimental	Control	Experimental	Control
Media	52,73	53	95,15	70,67
Desv. Estándar	22,89	23,33	6,21	6,81

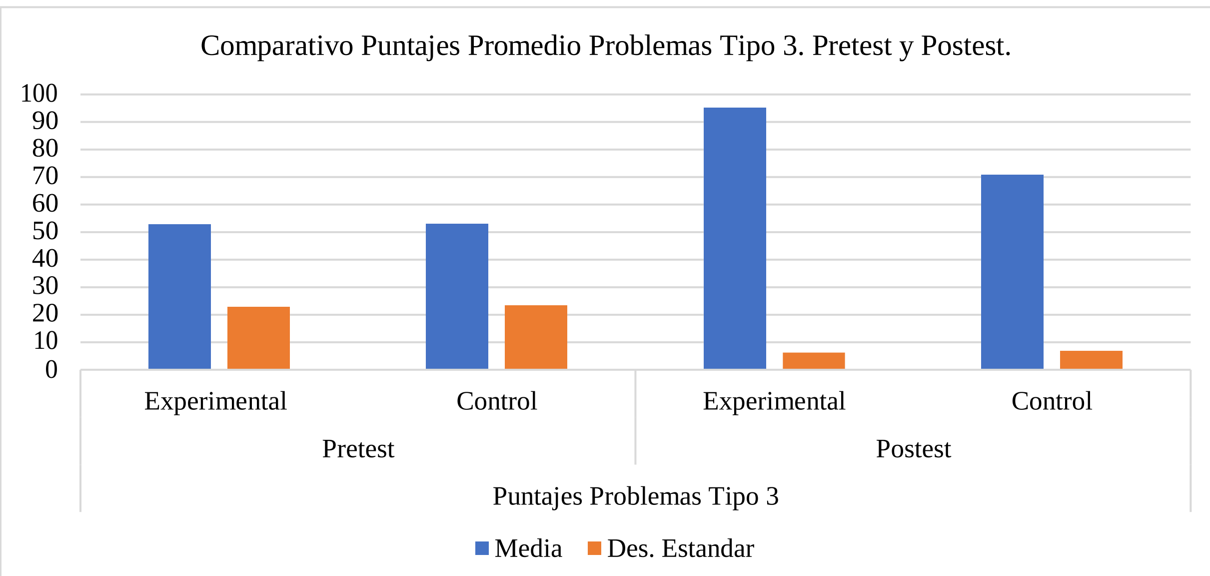


Figura 13. Comparativo Puntajes Promedios de Problemas Tipo 3. Pretest y Postest.

En cuanto a la variabilidad, nuevamente esta se reduce en los puntajes promedio en los dos grupos (grupo experimental de 22,89 a 6,21 y grupo control de 23,33 a 6,81). Además, contrastando los resultados de los puntajes promedio entre el grupo experimental y el grupo control en el postest, observamos que el grupo experimental obtuvo 24,48 puntos más que el grupo control en la solución de problemas Tipo 3, dejando ver de esta manera que la metodología CalMat tuvo un mayor efecto en el mejoramiento de los niveles de competencia para resolver problemas geométricos Tipo 3.

Tabla 31.

Comparación Puntajes promedio Totales de problemas Geométricos Pretest y Postest.

	Puntajes Totales Problemas Geométricos			
	Pretest		Postest	
	Experimental	Control	Experimental	Control
Media	60,33	61,47	94,33	72,9
Desv. Estandar	18,15	15,07	2,75	5,72

Finalmente, al analizar la Tabla 31 y Figura 14 concluimos que las dos metodologías para la enseñanza de la geometría incidieron en los niveles de competencia para resolver problemas geométricos: el grupo control pasó de un puntaje promedio total de 61,47, antes del proceso experimental, a un 72,9 después del proceso experimental. Esto implica una mejora del 18,59% en los puntajes mientras que el grupo experimental pasó de un puntaje promedio de 60,33 a

94.33, lo que implica una mejora del 56,35 % en los puntajes.

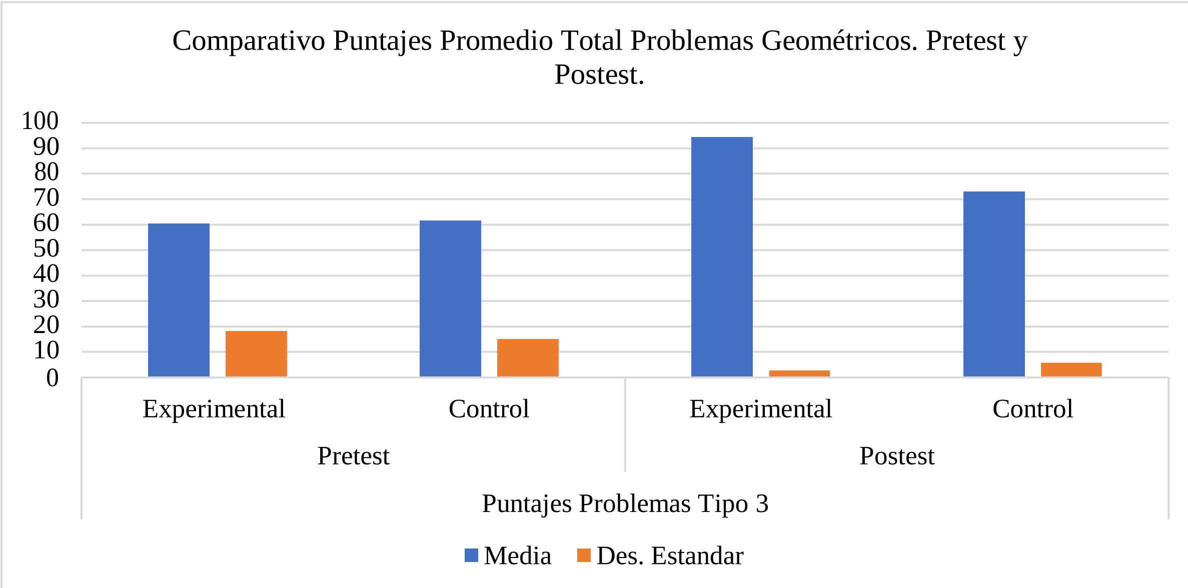


Figura 14. Comparativo Puntajes Promedios Totales de Problemas Geométrico. Pretest y Postest.

Tenemos, a su vez, una reducción de la variabilidad en los puntajes promedio en los dos grupos (grupo experimental de 18,15 a 2,75 y grupo control de 15,07 a 5,72). Además, contrastando los resultados de los puntajes promedio entre el grupo experimental y el grupo control en el postest, obtenemos que el grupo experimental obtuvo 21,43 puntos más que el grupo control en la solución de problemas geométricos lo cual evidencia que la metodología CalMat tuvo un mayor efecto en el mejoramiento de los niveles de competencia para resolver problemas geométricos.

4.4 Discusión de resultados

En cuanto al ANOVA paramétrico y no paramétrico realizado a los resultados del prestest, pudimos constatar que los dos grupos experimental y control eran homogéneos en cuanto a la variable de análisis, es decir los dos grupos tenían el mismo nivel de competencia para resolver problemas geométricos antes del proceso experimental. Lo anterior es evidente pues son estudiantes que han estado trabajando bajo la misma metodología de enseñanza desde los primeros grados de primaria.

Con respecto al proceso experimental, planeado, desarrollado y evaluado constatamos que las dos metodologías de enseñanza, tradicional y CalMat, influyeron en los niveles de competencia de los estudiantes y por ende en la solución de problemas, estas influencias fueron de naturaleza positiva para las dos metodologías, en la solución de problemas tipo 1, 2 y 3 a excepción de la metodología tradicional en los problemas tipo 2.

A continuación, discutiremos la naturaleza de la influencia, así como su nivel.

Para el desarrollo de problemas Tipo, 1 observamos que la metodología tradicional y CalMat influyeron positivamente, encontrando una mejoría en los puntajes del 51,8% y 70,35% respectivamente. Por tanto, debido a las dos metodologías de enseñanza los estudiantes mejoraron sus competencias matemáticas al identificar la información necesaria para hallar su solución ya que está de manera directa y clara, comprender fácilmente el tipo de respuesta que se espera, reconocer objetos geométricos en dos dimensiones, usar los números naturales para codificar, contar o medir; usar el conocimiento geométrico básico y las transformaciones en el plano (rotación, traslación, simetría) y construir o descomponer figuras planas a partir de condiciones dadas. Sin embargo, aunque las dos metodologías influyen positivamente, debemos resaltar que la metodología CalMat tiene un mayor efecto pues ella influyó un 18,55% más que la metodología tradicional.

Para el desarrollo de problemas Tipo 2, la metodología CalMat influyó positivamente, encontrando una mejoría en los puntajes del 23,17% en contraste con la metodología tradicional que tuvo una influencia negativa del 8,56%. Por tanto, debido a la metodología de enseñanza CalMat los estudiantes mejoraron sus competencias matemáticas al reconocer figuras geométricas en superposición o figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños; usar atributos y propiedades de los objetos geométricos y construir o descomponer sólidos a partir de condiciones dadas.

Con lo anterior, concluimos que, aunque la metodología tradicional permite mejorar las competencias matemáticas en los procesos de desarrollo de problemas Tipo 1, no tiene una influencia positiva para mejorar las competencias matemáticas asociadas a los problemas de Tipo 2. Esta falta de influencia se deba posiblemente a que la metodología tradicional no le permite al estudiante realizar una exploración y manipulación tangible del objeto geométrico, ni le permite el debate sobre transformaciones de objetos geométricos en el plano y espacio dentro del aula de clase. Por otra parte, este debate, permitido por la metodología CalMat y no por la tradicional, posibilita las construcciones mentales o tangibles de objetos geométricos y el descubrimiento de sus atributos y propiedades.

Para el desarrollo de problemas Tipo 3, encontramos que la metodología tradicional y CalMat influyeron positivamente, encontrando una mejoría en los puntajes del 33,33% y 80,44% respectivamente. Por tanto, los estudiantes mejoraron sus competencias matemáticas mediante las dos metodologías al realizar deducciones con la información dada, hacer manipulaciones aritméticas y establecer relaciones numéricas; usar y aplicar reglas, conceptos y propiedades de los objetos geométricos; crear o interpretar a una representación geométrica bidimensional o tridimensional, comparar y ordenar objetos respecto a atributos medibles; abstraer y representar mentalmente objetos tridimensionales, hacer manipulaciones algebraicas sencillas; al usar otros conceptos matemáticos no mencionados explícitamente en el problema e identificar patrones y regularidades; al reflexionar sobre los procesos que se necesitan o se emplean en la solución del problema; al comprender y manejar conceptos matemáticos en contextos que sean nuevos o complejos.

Cabe destacar que, aunque las dos metodologías influyen positivamente, es la metodología CalMat la que tiene un mayor efecto pues ella influyó un 47,11% más que la metodología tradicional. Esta influencia extra de la metodología CalMat se debe a que la metodología por sí misma, y como se dijo anteriormente, permite el debate y la discusión dentro del aula de clase, discusiones en donde se proponen, aceptan y se rechazan estrategias de solución de problemas, discusiones en las cuales los estudiantes mejoran sus abstracciones, sus representaciones, creaciones e interpretaciones, sus procesos demostrativos, su comprensión y reflexión con lo cual potencian sus competencias matemáticas con ayuda de sus compañeros y docentes.

Con respecto a los objetivos específicos planteados en nuestra investigación, podemos decir que estos se alcanzaron y que:

- Pudimos determinar en qué medida el uso del Calendario Matemático, como material didáctico, fortalece la resolución de problemas en situaciones geométricas de Tipo 1 en estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de la Paz, ya que se observó que la metodología CalMat favoreció el fortalecimiento de la resolución de problemas dentro del grupo experimental en 36,67 puntos (70,33%) en contraste con la metodología tradicional aplicada al grupo control, la cual favoreció el fortalecimiento de la resolución de problemas en 24 puntos (51,8%).
- Pudimos determinar en qué medida el uso del Calendario Matemático como material didáctico, fortalece la resolución de problemas en situaciones geométricas de Tipo 2 en estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de la Paz, ya que se observó que la metodología CalMat favoreció el fortalecimiento de la resolución de problemas dentro del grupo experimental en 18,67 puntos (23,17%) en contraste con la metodología tradicional aplicada al grupo control, la cual no favoreció el fortalecimiento de la resolución de problemas.
- Pudimos determinar en qué medida el uso del Calendario Matemático como material didáctico, fortalece la resolución de problemas en situaciones geométricas de Tipo 3 en estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de la Paz, ya que se observó que la metodología CalMat favoreció el fortalecimiento de la resolución de problemas dentro del grupo experimental en 42,42 puntos (80,44%) en contraste con la

metodología tradicional aplicada al grupo control, la cual favoreció el fortalecimiento de la resolución de problemas en 17,67 puntos (33,33%).

Al analizar la medida en que la metodología CalMat favoreció el fortalecimiento de la resolución de problemas, concluimos que esta tiene un mayor efecto en la resolución de problemas Tipo 3, pues el Calendario Matemático es un material didáctico compuesto en su totalidad de situaciones problema que exigen para su desarrollo las destrezas asociadas a esta tipificación.

Con respecto al **objetivo general** planteado, podemos decir que este se alcanzó y que:

- Pudimos determinar en qué medida el uso del Calendario Matemático como material didáctico fortalece la resolución de problemas geométricos en estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de la Paz, ya que se observó que la metodología CalMat favoreció el fortalecimiento de la resolución de problemas geométricos dentro del grupo experimental en 34 puntos (56,35%) en contraste con la metodología tradicional aplicada al grupo control, la cual favoreció el fortalecimiento de la resolución de problemas en 11 puntos (18,59%).

Con respecto a la metodología CalMat se puedo observar que su influencia en los resultados del grupo experimental, permitió obtener puntajes más homogéneos, esto evidenciado en los valores de desviación estándar, con lo cual, podemos afirmar que esta metodología afecta de igual forma a la mayoría de los miembros del grupo experimental, en contraste con la metodología tradicional cuya desviación estándar para los puntajes fue mayor.

El efecto igualitario de la metodología CalMat sobre cada uno de los miembros del grupo experimental se debe, a que esta metodología, involucra en sus debates a todos los miembros del grupo, sin tener exclusión ninguna y son, el profesor junto con los estudiantes, los autores de tal dinámica pues es con sus argumentaciones, contra-argumentaciones, demostraciones y contraejemplos que dinamizan las discusiones y los debates, esto en contraste con la metodología tradicional, en la cual participan los estudiantes más activos y predispuestos.

Con respecto a los resultados del postest también podemos decir que la influencia de la metodología CalMat y tradicional sobre los niveles de competencia para resolver problemas geométricos Tipo 1, 2 y 3 son estadísticamente diferentes pues sus p-valor (0,00) son menores al nivel de significación de 0,05 lo cual reafirma la conclusión ya señalada: la metodología CalMat tiene un efecto diferente y mayor a la metodología tradicional.

Siguiendo la argumentación anterior, podemos afirmar con una confianza del 95% que la metodología bajo el CalMat es mejor que la metodología tradicional. Los resultados obtenidos en la Institución Educativa Reina de la Paz coinciden con los trabajos de:

a. Becerra, (2013) quien concluyó que el trabajo con el Calendario Matemático, basado en el enfoque de resolución de problemas, fortalece los procesos de pensamiento de los estudiantes en los diferentes componentes matemáticos como lo muestra en los resultados finales de los promedios del grupo experimental con 15,77 y grupo control con 10,41, siendo una diferencia de 5 puntos.

b. Sanabria y Moreno (2015) quienes reconocen las bondades del CalMat y la importancia de implementarlo en el aula de clase y proponen a los profesores brindar espacios para que los estudiantes comuniquen sus ideas y así alcanzar un mejor nivel de competencia matemática, aspecto sobre el cual hallamos evidencia en los procedimientos que los estudiantes hicieron al buscarle solución a los problemas en la fase de implementación (en el Anexo 6 se da cuenta de una evidencia).

c. Pineda (2013) quien manifiesta en su investigación que los problemas que presentan los estudiantes a nivel universitario en la asignatura de geometría descriptiva vienen desde la preparación en la educación primaria y básica con una mala práctica pedagógica y con problemas descontextualizados que no implican una actividad intensa de pensamiento para su resolución. Por tanto, afirma que la metodología de resolución de problemas permite a los estudiantes exponer y respetar las opiniones de los otros, aprender analizar, favorece la construcción de conceptos significativos de geometría que conducen a la reconstrucción del conocimiento y a desarrollar habilidades como la creatividad y la investigación.

d. Echenique (2008) quien afirma que el docente es quien tiene en sus manos el éxito de estimular a los alumnos a la curiosidad por encontrar la solución a situaciones problema planteadas por él y despertar así el gusto por aprender a tener un pensamiento independiente. En nuestra investigación, los estudiantes diseñaban o utilizaban material concreto para visualizar las posibles soluciones a las situaciones dadas, manifestando el agrado por exponer su estrategia.

Los resultados de los trabajos de los investigadores mencionados respaldan el resultado de nuestra investigación en el sentido de que sí ocurren cambios positivos con la aplicación del

CalMat dado que los test fueron diseñados tomando problemas de este material didáctico, el cual se fundamenta en el enfoque de resolución de problemas, expuesto por el profesor Carlos Zuluaga.

Al comparar los resultados de esta investigación con el marco teórico se confirman los planteamientos de los autores citados, que en síntesis afirman la importancia de incluir en la clase de matemáticas problemas que contribuyan a adquirir nuevas formas de pensar en el estudiante, a desarrollar la metacognición y a construir, de ser posible, nuevos conocimientos; también que la implementación de metodologías que superen lo tradicional se convierte en una oportunidad para oxigenar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y, en particular, para potenciar el pensamiento matemático de los estudiantes.

El aumento de los promedios en el postest nos permite señalar que sí existe una influencia positiva en el aprendizaje y en las competencias asociadas a la resolución de problemas a partir del uso del Calendario Matemático como material didáctico para fortalecer la resolución de problemas geométricos en los estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de la Paz de Floridablanca.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

a) El grupo experimental mostró mejores resultados en la solución de problemas Tipo 1, 2 y 3, en contraste con el grupo control. Es decir, el grupo experimental obtuvo en promedio 18 puntos más en la solución de problemas Tipo 1 y Tipo 2 que el grupo control y 25 puntos más en la solución de problemas Tipo 3, lo que significa que los estudiantes estarían en capacidad de hacer manipulaciones aritméticas, establecer relaciones numéricas, usar y aplicar reglas, conceptos y propiedades de los objetos geométricos, abstraer y representar mentalmente objetos tridimensionales, hacer manipulaciones algebraicas sencillas, usar otros conceptos matemáticos no mencionados explícitamente en el problema y reflexionar sobre los procesos que se necesitan o se emplean en la solución del problema.

b) Se comprueba, teniendo en cuenta a Tarazona (2018), que la resolución de problemas implica cambios metodológicos lo cual exige a los maestros compromiso para investigar, analizar, diseñar estrategias y llevarlas al salón de clase. Es decir, el cambio metodológico que se dio al implementar el CalMat aportó en gran medida al fortalecimiento de la resolución de problemas, dando resultados favorables en esta competencia matemática.

   Al plantear la implementación de estrategias metodológicas para el fortalecimiento de la resolución de problemas matemáticos, en estudiantes de cuarto grado de primaria de la institución educativa de donde surgió la problemática de esta investigación, se puede decir que es importante el uso del CalMat en el proceso educativo, puesto que ha dado resultados anteriormente expuestos, los cuales permiten hacer un llamado a los profesores de matemáticas para que se motiven a orientar sus actividades pedagógicas haciendo uso de este material ya que complementa el trabajo en el aula y motiva a los estudiantes (Garzón, 2014).

c) Desde la etapa experimental, señalamos la importancia de la manipulación, los modelos visuales, los esquemas y los diagramas, que pueden ser usados como elementos para la construcción de un puente entre las nociones intuitivas de los estudiantes, los conceptos y procedimiento de las matemáticas formales. Mediante este trabajo, se intentó clarificar que la resolución de problemas no es una responsabilidad del estudiante pues poner problemas para solucionar en clase o como tarea en casa no motiva a avanzar, sino que el profesor debe gestionar asertivamente su clase para motivar y movilizar a sus estudiantes. Podemos afirmar, aunque sin mayores evidencias en este trabajo, que el enfoque metodológico de resolución de problemas genera ambientes de clase enriquecidos, en donde el profesor actúa como experto cuando la situación de clase lo amerita; una clase de matemáticas guiada por este enfoque favorece la interacción entre los estudiantes, el desarrollo de habilidades comunicativas y el respeto por la opinión del otro. Es decir, este enfoque contribuye a que los profesores superen el enfoque tradicional de enseñanza.

d) En relación al desarrollo del aprendizaje de geometría en los estudiantes, el estudio aporta en este aspecto desde lo didáctico ya que el ambiente de discusión y el trabajo colaborativo contribuyen al aprendizaje significativo de los conceptos geométricos.

e) Por otra parte, se puede concluir que la contextualización de los problemas del CalMat aporta significativamente al desarrollo de la competencia resolución de problemas, ya que está fundamentada en este enfoque. En el planteamiento de las hipótesis específicas de la presente investigación, establecimos tras la fase de intervención pedagógica que el uso del Calendario

Matemático como material didáctico fortalece la resolución de problemas geométricos en los estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Reina de la Paz de Floridablanca. La conclusión que se extrae de estas hipótesis es la siguiente: un elemento importante en la explicación de los resultados sea la incorporación de estrategias de carácter emocional-afectivo, psicológico y social-cultural ya que se percibió en el grupo experimental un cambio de actitud frente a la clase propuesta, al manipular un material concreto que permitía vivenciar los problemas geométricos de forma, quizás, más significativa.

f) Otra conclusión que emerge de la investigación, aunque no de corte cuantitativo, es que, por la consistencia de los hallazgos de este estudio con los hallazgos de Becerra (2013), quien también encontró niveles de efectividad en el uso del calendario, se podría contribuir a sustentar que la enseñanza con este material didáctico motiva y desarrolla actitudes positivas para el aprendizaje individual y grupal de los estudiantes al momento de resolver problemas matemáticos. Es así como con este trabajo confirmamos lo que señala el MEN: "Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos" (2006, p. 49).

Es importante señalar que los resultados de este estudio nos resultan coherentes con lo observado en lo empírico tanto en las prácticas de aula de las investigadoras como por el equipo de Matemática Recreativa del Grupo EDUMAT-UIS de la Universidad Industrial de Santander.

g) Finalmente, todos los hallazgos encontrados en esta investigación son extrapolables a otras poblaciones de estudiantes con características similares. Es de recordar que las conclusiones derivadas de una replicación de esta investigación no son 100% iguales a las obtenidas en este proceso pues dichas conclusiones fueron obtenidas asumiendo un error tipo I de 0,05 y un error tipo II de 0,10.

5.2 Recomendaciones

a) Contemplar mayor tiempo en el trabajo de campo ya que, tal cual sucedió en la investigación Fabián (2013), el empleado en este estudio podría considerarse escaso, esto a pesar de que consideramos, en las pruebas y en el tratamiento, problemas estrictamente geométricos propios del Nivel I del Calendario Matemático del proyecto Colombia Aprendiendo, estructurados según la capacidad cognitiva y la disponibilidad de conocimientos previos de estudiantes de cuarto primaria. En este sentido, sugerimos considerar que la implementación del CalMat toma tiempo ya que los estudiantes tienden, en un inicio, a mostrarse resistentes a trabajar sin proporcionarles teoría previamente, se muestran inseguros para plantear una solución sí antes el profesor no ha hecho ejemplos que orienten la resolución del problema (cabe señalar que esta transición de la clase magistral a la clase con enfoque de resolución de problemas resulta ser un tema muy interesante para investigar). De manera que, para esta investigación, la programación de la intervención pedagógica de 30 horas resultó insuficiente para que los estudiantes dieran mayores resultados en el marco del enfoque de resolución de problemas al resolver problemas del CalMat. Esto se evidenció en los puntajes alcanzados por ambos grupos (experimental y control) en la postest, ya mencionados.

b) Diseñar una investigación mixta que permita, por ejemplo, analizar cómo es la resolución de problemas de los estudiantes antes y después de implementar el uso del Calendario Matemático.

c) Enriquecer la tipificación de problemas de Nivel 1 del CalMat en relación a las competencias matemáticas que se requieren para su solución pese a que, consideramos, que la lograda aquí es un valor agregado y un buen punto de partida.

d) Al equipo de profesores de Matemáticas de la institución educativa Reina de La Paz, le sugerimos aunar esfuerzos para consolidar el uso del Calendario Matemático plenamente ya que este trabajo, como el de Becerra (2003), evidencian que este material aporta a la formación de estudiantes (y de los profesores; aspecto que queda por documentar).

e) Documentar los esfuerzos que se realicen para llevar el CalMat y el enfoque de resolución de problemas pues, aunque numerosos autores han aportado en este sentido, aún son pocas las propuestas concretas que ayudan a los profesores de matemáticas a utilizar el enfoque de resolución de problemas. El Calendario Matemático, del proyecto Colombia Aprendiendo, merece ser explorado y documentado con más rigurosidad para así dar a conocer sus potencialidades en relación a la resolución de problemas geométricos, métricos, aleatorios y numéricos, los cuales contribuyen al desarrollo, en sí, del pensamiento matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguilar, B. (2014). *Resolución de problemas matemáticos con el Método de Polya mediante el uso de Geogebra en primer grado de secundaria*. (Tesis de maestría). Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, México.

Alfaro, C. (2006). Las ideas de Polya en la resolución de problemas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. (1), 1-13.

Alsina, C. Burgués, C. y Fortuny, J (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.

Araujo, W. (2003). *Resolución de problemas: como estrategia de enseñanza en ingeniería. Tesis de posgrado no publicada* (Tesis de Especialización en Docencia Universitaria). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Astola, P., Salvador, A., y Vera, G. (2012). *Efectividad del programa "gpa-resol" en el incremento del nivel de logro en la resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos en estudiantes de segundo grado de primaria de dos instituciones educativas, una de gestión estatal y otra privada del distrito de San Luis*. (Tesis de maestría). Universidad Pontifica Católica del Perú, San Miguel, Perú.

Barajas, C. (2015). *Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos: una mirada desde la resolución de problemas que implican fenómenos de variación*. (Tesis de maestría). CICATA-IPN, México D.F., México.

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 1 (1). Dsiponible en: http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno1/Cuadernos%201%20c%204.pdf

Becerra, S. (2013). *La aplicación del calendario matemático y su implicación frente a la resolución de problemas en los estudiantes de grado sexto*. (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia.

Bedoya, M. y Ospina, S. (2014). *Concepciones que poseen los profesores de matemática sobre la resolución de problemas y cómo afectan los métodos de enseñanza aprendizaje*. (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.

Benítez, W. (2011). *Concepciones acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje: un estudio comparativo entre docentes en ejercicio y docentes en formación*. (Tesis de maestría). Universidad del Cauca, Popayán, Colombia.

Callejo, M. y Vila, A. (2003). Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 225-247.

Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en Matemáticas. *Revista Educación*, 32 (1), 123-138.

Camargo, L. y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné*, *Episteme y Didaxis: TED*, (32), 4-8. Recuperado el 1° de diciembre de 2018 de http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200001&lng=en&tlng=es.

Colombia Aprendiendo. (1997-2018). *Calendario Matemático.* Disponible en: http://www.colombiaaprendiendo.edu.co/material-del-proyecto/calendario-matematico/

Conejo, L. y Ortega, T. (2013). Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria. *Educación Matemática*, *3*(25). Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/405/40529854006.pdf

Congreso de la República de Colombia. (1994). *Ley General de Educación*. Disponible en: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Contreras, B. (2005*). La integración de la tecnología y la resolución de problema, un escenario de enseñanza aprendizaje en la asignatura de matemática*. (Tesis de maestría). Universidad de Chile, Chile. Disponible en: http://www.cybertesis.cl/tesis/uchile/2005/contreras_b/sources/contreras_b.pdf

Contreras, L. y Carrillo, J. (1996). Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula. *Revista Educación Matemática*. *10*(1), 26-37. Disponible en: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol10/1/04Contreras.pdf

Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. Rico (Ed). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 155-177). Barcelona: Horsori.

Cortés, J, y Sanabria, F. (2012). *Concepciones y Creencias de Profesores de Matemáticas sobre Resolución de Problemas: un estudio de casos*. (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Domínguez,

Díaz, A. (2009). *Diseño de Experimentos*. Medellín, Colombia: Universidad de Antioquía.

Díaz, J. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos. *El Cálculo y su Enseñanza*. 1, 91-97. Disponible en: http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/GZe5a1110t9.pdf

Díaz, J. y Díaz, R. (2018). Los Métodos de Resolución de Problemas y el Desarrollo del Pensamiento Matemático. *Bolema*, *32*(60), 57-74. Disponible en: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v32n60/0103-636X-bolema-32-60-0057.pdf

Dorsch, F. (1985) *Diccionario de Psicología*. Barcelona: Herder.

Echenique, I. (2006). Matemáticas resolución de problemas. Educación primaria. *Navarra*: Departamento de educación. Gobierno de Navarra. Recuperado de http://ebookbrowse.com/matematicas-resolucion-de-problemas-echenique-pdfd142615878

Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A Model. *Journal of Education for Teaching*, *15*(1), 13-33.

Fabián, G. (2013). Efectividad de un módulo de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de secundaria del Callao. *Propósitos y Representaciones, 1*(1), 87-105. DOI: http://dx.doi.org/10.20511/pyr2013.v1n1.8

Gamboa, A. y Ballesteros, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, XIV, (2), 125-142. Disponible en: http://www.redalyc.org/pdf/1941/194115606010.pdf

Garzón, J. (2014). *Objeto virtual de aprendizaje para el área de matemáticas*. (Tesis de maestría). Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín, Colombia.

George, D. y Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A Simple Guide and Reference. 11.0* Update (4.ª ed.). Boston: Allyn & Bacon.

Guerrero, Y. y Rey, N. (2013). Dificultades en la resolución de problemas multiplicativos. *Revista Científica*. 197-200. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/6626/1/Rey2013Dificultades.pdf

Gutiérrez, J. (2012). *Estrategias de enseñanza y resolución de problemas matemáticos según la percepción de estudiantes del cuarto grado de primaria de una institución educativa – Ventanilla*. (Tesis de maestría). Universidad de San Ignacio de Loyola, Perú.

Hernández, R; Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación.* Sexta Edición. México: McGraw Hill.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). (2014). *Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal 2014. Pruebas Saber 3°, 5° y 9°.* [Versión en línea]. Disponible en: http://www.atlantico.gov.co/images/stories/adjuntos/educacion/lineamientos_muestral_censal_saber359_2014.pdf

ICFES. (2016). *Resultados de grado quinto en el área de matemáticas, Colegio Reina de la Paz.* Disponible en: www.icfes.gov.co.com

ICFES. (2017). *Resultados de grado quinto en el área de matemáticas, Colegio Reina de la Paz.* Disponible en: www.icfes.gov.co.com

López, E. (2014). *Estrategias que emergen en la resolución de problemas de variación y vambio de estudiantes de precálculo*. (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia.

López, C., Aldana, E. y Erazo, J. (2018). Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas en cálculo diferencial e integral. *Revista Logos, Ciencia & Tecnología. 10*(1), 144-156. Disponible en: http://revistalogos.policia.edu.co/index.php/rlct/article/viewFile/448/pdf

Llanos, S. (2008). *Estrategias heurísticas de resolución de problemas en el aprendizaje de la matemática*. Lima: Derrama Magisterial.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá, Colombia: Autor.

MEN. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Bogotá, Colombia: Autor.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas*. [Versión en línea]. Disponible en: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

MEN. (2016*). Guía de interpretación y uso de resultados de las pruebas saber 3°, 5° y 9°.* Bogotá: Autor.

Tristan-Lopez, A. (2008). Modificación al modelo de Lawshe para el Dictamen Cuantitativo de la Validez de Contenido de un Instrumento Objetivo. *Avances en Medición*, 6, 37-48. Disponible en: http://www.humanas.unal.edu.co/psicometria/files/8413/8574/6036/Articulo4_Indice_de_validez_de_contenido_37-48.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

OCDE. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012 Matemáticas, Lectura y Ciencias.* [En línea]. Disponible en: http://www.pisa.oecd.org

OCDE (2016) *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2015 Matemáticas, Lectura y Ciencias.* [En línea]. Disponible en: http://www.pisa.oecd.org

Ortega, T., Pecharroman, C. y Sosa, P. (2011). La importancia de los enunciados de problemas matemáticos. *Educatio Siglo XXI*, *29*(2), 99-116.

Palomares, J. y Hernández, J. (2005). Estrategias utilizadas por alumnos de quinto grado para resolver problemas verbales de matemáticas. *Revista Educación Matemática*. *17*(1), 5-31. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/405/40517102.pdf

Pérez, J. y Gardey, A. (2011). *Definiciones: Definición de pensamiento matemático*. Disponible en: http://definición.de/pensamientomatemático/

Pineda, Martha. (2013). *Propuesta pedagógica para el aprendizaje de conceptos de geometría descriptiva fundamentada en la resolución de problemas.* (Tesis de grado). Universidad Industrial de Santander. Santander, Colombia.

Polya, G. (1975). *Como resolver y plantear problemas*. México: Trillas.

Polya G. (1981). *Matemática y razonamiento plausible.* Madrid: Tecnos.

Quereda, N. (2012). *Materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas* (tesis de maestría). Universita Almeriencis, España.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Lilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (Eds.). *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*. (Vol. 1, pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/529/1/RicoL07-2777.PDF

Sanabria, E. y Moreno, D. (2015). Aportes del calendario matemático para el desarrollo y/o fortalecimiento de competencias matemáticas. *1*(1), 767-781. Disponible en: http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME

Sánchez, L. (2001). *Dificultades de los alumnos de sexto grado de educación primaria para la resolución de los problemas. Análisis retrospectivos*. (Tesis de maestría). Universidad de Colima, México.

Santos Trigo, L. (1997*). Principios y métodos de la resolución de problemas*. México: Grupo Iberoamérica.

Santos-Trigo, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos.* México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1982). *Some thoughts on problem solving research and mathematics education*, en Lester, F.K. y Garofalo, J. (eds.), Mathematical Problem Solving: Is- sues in Research. (Franklin Institute Press: Philadelphia), pp. 25-35.

Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia (Seduca). (2005). *Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas.* Colombia: Gobernación de Antioquia.

Silva, M. (2009). *Método y estrategias de resolución de problemas matemáticos utilizadas por alumnos del sexto grado de primaria*. (Tesis de licenciatura). Universidad Iberoamericana, México. Disponible en: http://www.cimeac.com/images/2a_parte_reporte_final_inide.pdf

Tarazona, F. (2018). *El juego como estrategia metodológica para fortalecer el Pensamiento numérico- variacional y la competencia Planteamiento y resolución de problemas con números Naturales, en estudiantes del grado sexto, de la institución educativa los molinos sede platanal, municipio de Capitanejo Santander.* (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia.

Tristán-López, A. (2008). Modificación al modelo de Lawshe para el dictamen cuantitativo de la validez de contenido de un instrumento objetivo. *Avances en Medición*, 6, 37-48.

Zapata, M. y Blanco, L. (2007). Las concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje de los profesores de matemáticas en formación. *Campo Abierto*, 26(2), 83-108. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/28203378

Williner, B. (2014) Habilidades matemáticas referidas el concepto de Derivada y uso de tecnología. *Revista de Didáctica de las Matemáticas* (Números), *8*(1), 101-124. Disponible en: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/87/Articulos_07.pdf

Anexo 1. Matriz de consistencia de la investigación

TITULO: El uso del calendario matemático como material didáctico para fortalecer la resolución de problemas geométricos en estudiantes de cuarto grado de la institución educativa Reina de la paz Floridablanca, Santander.

AUTORAS: Claudia Johanna Tristancho Arguello y Luz Genny Tristancho Arguello

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES
Problema General: ¿En qué medida el uso del Calendario Matemático como material didáctico fortalece la resolución de problemas geométricos en estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de la Paz de Floridablanca, Santander, en el 2018? **Problemas específicos** a) ¿En qué medida el uso del Calendario Matemático, mediante la metodología de resolución de problema, favorece la solución de problemas geométricos de nivel 1 en estudiantes de cuarto grado de primaria del colegio Reina de la Paz? b) ¿En qué medida el uso del Calendario Matemático el uso del Calendario Matemático, mediante la metodología de resolución de problema, favorece la solución de problemas geométricos de nivel 2 en estudiantes de cuarto grado de primaria del colegio Reina de la Paz? c) ¿En qué medida el uso del Calendario Matemático el uso del Calendario Matemático, mediante la metodología de resolución de problema, favorece la solución de problemas geométricos de nivel 3 en estudiantes de cuarto grado de primaria del colegio Reina de la Paz?	**Objetivo General** Determinar la medida en que el uso del Calendario Matemático como material didáctico fortalece la resolución de problemas geométricos en estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Reina de la Paz de Floridablanca, Santander, en el 2018. **Objetivos específicos** a) Determinar en qué medida el uso del Calendario Matemático, mediante la metodología de resolución de problema, incide positivamente en la solución de problemas geométricos de tipo 1 en estudiantes de cuarto grado de primaria de Reina de la Paz. b) Determinar en qué medida el uso del Calendario Matemático, mediante la metodología de resolución de problema, incide positivamente en la solución de problemas geométricos de tipo 2 en estudiantes de cuarto grado de primaria del colegio Reina de la Paz. Determinar en qué medida el uso del Calendario Matemático, mediante la metodología de resolución de problema, incide positivamente en la solución de problemas geométricos de tipo 3 en estudiantes de cuarto grado de primaria del colegio Reina de la Paz.	**Hipótesis General** El uso del Calendario Matemático como material didáctico fortalece significativamente la resolución de problemas geométricos en los estudiantes de cuarto grado de primaria de la institución educativa Reina de la Paz de Floridablanca, Santander, en el 2018. **Hipótesis específicas** a) El uso del Calendario Matemático como material didáctico fortalece significativamente la resolución de problemas geométricos de tipo 1 en los estudiantes de cuarto grado de la institución educativa Reina de la Paz. b) El uso del Calendario Matemático como material didáctico fortalece significativamente la resolución de problemas geométricos de tipo 2 en los estudiantes de cuarto grado de la institución educativa Reina de la Paz. c) El uso del Calendario Matemático como material didáctico fortalece significativamente la resolución de problemas geométricos de tipo 3 en los estudiantes de cuarto grado de la institución educativa Reina de la Paz.	**Variable dependiente-Resolución de problemas geométricos** Es la capacidad de un individuo para seleccionar o diseñar un plan o estrategia para solucionar problemas utilizando conocimientos acordes con su edad y su nivel de formación. **Dimensiones:** Comprensión del problema Concepción de un plan Ejecución del plan Visión retrospectiva **Indicadores:** Identificación del objetivo del problema y reconocer los datos necesarios para su solución. Formulación de una estrategia de solución. Uso de procedimientos y conceptos geométricos. Revisión de la solución obtenida. **Variable independiente: Metodología** Metodología mediante la cual se usa el Calendario Matemático como material didáctico, además de su enfoque de resolución de problemas. **Dimensiones:** Estrategia de enseñanza basada en problemas. **Indicadores:** Grado de análisis de los problemas por parte de los estudiantes. Conexión entre los presaberes y los nuevos conceptos de los estudiantes. Adaptación al propio estilo de aprendizaje del estudiante. Estimulación del desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. Desarrollo de estrategias heurísticas para la resolución de problemas.

<table>
<tr><th>METODO Y DISEÑO</th><th>POBLACIÓN</th><th>TÉCNICAS E INSTRUMENTOS</th><th>MÉTODO DE ANÁLISIS DE DATOS</th></tr>
<tr>
<td>Tipo de estudio:

Experimental

Diseño de investigación:

Experimento puro

Método de estudio:

Cuantitativo</td>
<td>Población

<table><tr><td colspan="2">TOTAL DE ESTUDIANTES: 26</td></tr><tr><td>HOMBRES</td><td>MUJERES</td></tr><tr><td>6</td><td>20</td></tr></table>
Fuente: Lista de matrícula del grado cuarto de primaria de la Institución educativa Reina de la Paz.

Muestra

<table><tr><td colspan="2">TOTAL DE ESTUDIANTES: 21</td></tr><tr><td>HOMBRES</td><td>MUJERES</td></tr><tr><td>6</td><td>15</td></tr></table></td>
<td>Técnicas

Los instrumentos de medición que se utilizaron fueron dos cuestionarios, uno para ser aplicado antes del proceso experimental, llamado pretest y uno para ser aplicado al final del proceso experimental llamado postest.

Para la construcción de los instrumentos de medición se seleccionaron ítems (problemas geométricos) de forma adecuada de un banco de 39 ítems tomados de los calendarios matemáticos de años anteriores y validados por expertos.</td>
<td>Los datos recopilados en esta investigación fueron analizados desde los enfoques estadísticos descriptivos e inferencial. En cuanto al enfoque estadístico descriptivo, se utilizaron diagramas de barras, cajas y bigotes, tablas de contingencia, cálculo de medidas de tendencia central y medidas de dispersión.

Por otra parte, bajo el enfoque estadístico inferencial se utilizó ANOVA paramétrico, ANOVA no paramétrico, Prueba de chi-cuadrado y análisis de dependencia y contraste de medias para poblaciones dependientes.

Las técnicas estadísticas inferenciales tales como el ANOVA paramétrico y no paramétrico, mencionados anteriormente, permitieron contrastar las siguientes hipótesis estadísticas, la cuales están en sintonía con los objetivos específicos planteados.</td>
</tr>
</table>

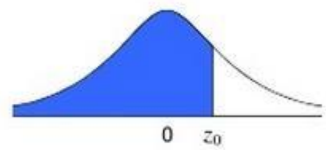
Anexo 2. Evidencias fotográficas.

Anexo 3. Tabla de probabilidades de la distribución normal estándar

μ = Media

σ = Desviación típica

$$P(z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$



Tipificación: $z_0 = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	**1,6**
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	**1,2**

Anexo 4. Carta de consentimiento de padres de familia

Señor:

PADRE DE FAMILIA

E. S. M

Cordial saludo.

Por medio de la presente nos dirigimos a ustedes padres de familia de la manera más respetuosa para concebir su consentimiento, permiso o autorización a su hijo(a) de publicar fotos y participar en nuestra tesis de grado cuyo título es "Uso *del calendario matemático como material didáctico para fortalecer la resolución de problemas geométricos en estudiantes de cuarto grado de primaria de la institución educativa Reina de la paz".* Autoras Claudia Johanna Tristancho Arguello y Luz Genny Tristancho Arguello docentes de la institución ya mencionada.

Estas actividades se realizarán durante la jornada escolar en la clase de geometría a través de pre test y post test cuyos ejercicios son tomados del calendario matemático y las publicaciones se harán solo de tipo pedagógico

De ante mano agradecemos su atención.

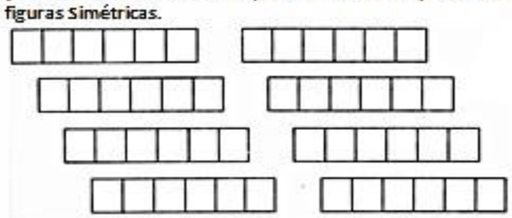
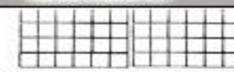
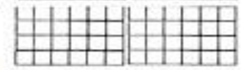
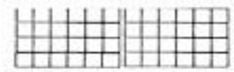
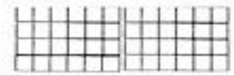
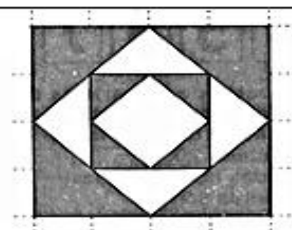
ACEPTO SI__________NO__________

Firma: _________________________

Anexo 5. Pretest y postest

COLEGIO REINA DE LA PAZ

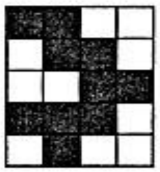
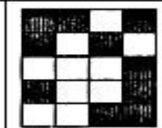
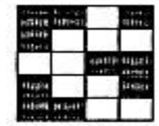
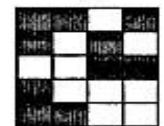
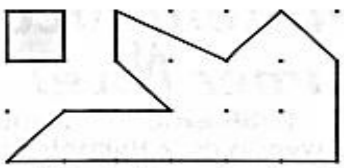
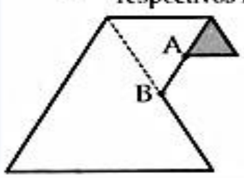
PRETES 1

SITUACION	PROCEDIMIENTO	RESPUESTA
Pinta cada vez dos cuadrados de rojo, dos cuadrados de azul y dos cuadrados de verde, de tal manera que se formen figuras Simétricas. 		A.  B.  C.  D. 
El pirata Barba Negra organizó sus lingotes de oro formando la pirámide que se observa. ¿Cuántos lingotes de oro tiene Barba Negra? 		A. 8 lingotes B. 16 lingotes C. 30 lingotes D. 32 lingotes
 Un grupo de niños se encuentra pintando la figura. ¿Qué fracción de la figura les hace falta por pintar?		A. 12/18 B. 4/8 C. 6/32 D. 12/32

Tomado del Calendario Matemático

COLEGIO REINA DE LA PAZ

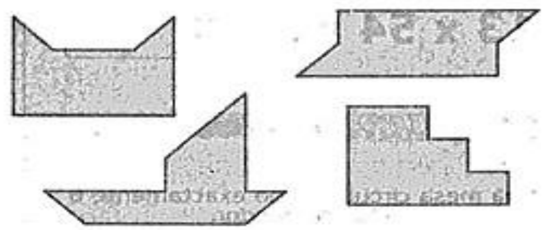
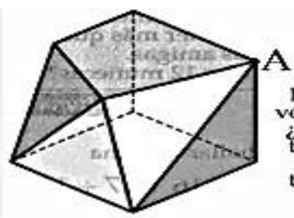
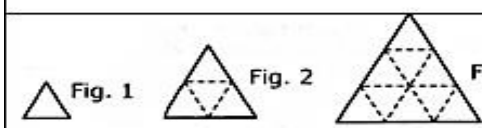
PRETEST : 2

SITUACION	PROCEDIMIENTO	RESPUESTA
 Para sombrear totalmente el rectángulo de la izquierda debes tomar uno de los de abajo (**a**, **b**, **c**, **d**), girarlo 180° y sobreponerlo.		 a.  b.  c.  d.
 El área del cuadrado sombreado es 1 cm^2. ¿Cuál es el área de la figura demarcada?		A. 8 cm^2 B. 9 cm^2 C. 10 cm^2 D. 11 cm^2
Los tres triángulos son equiláteros. A y B son puntos medios de los respectivos lados.  Si un caracol demora 15 minutos para recorrer por el borde el triángulo sombreado, ¿cuánto demorará en recorrer la figura completa?		A. 15 minutos B. 30 minutos C. 45 minutos D. 75 minutos

Tomado del Calendario Matemático

COLEGIO REINA DE LA PAZ

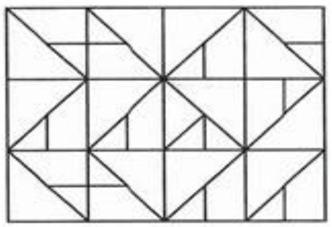
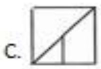
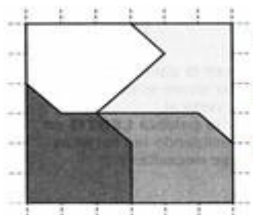
PRETEST 3

SITUACION	PROCEDIMIENTO	RESPUESTA
Tangrama de cinco fichas  Recorta un cuadrado en cartulina y divídelo en cinco fichas como se muestra en el dibujo de la izquierda. Utilizando cada vez estas cinco fichas reconstruye las figuras de la derecha. *¡Inventa tus propias figuras y reta a tus amigos a reconstruirlas!*		
 El punto A es un vértice de la figura. ¿Cuántos vértices tiene esta figura? ¿Cuántas caras tiene esta figura?		A. Vértices 7 y caras 7 B. Vértices 8 y caras 8 C. Vértices 7 y caras 8 D. Vértices 8 y caras 7
 Las figuras están formadas por triángulos equiláteros. El perímetro de la figura 1 es 6. ¿Cuál es el perímetro de la figura 2? ¿Cuál es el perímetro de la figura 3? Si se siguen dibujando las figuras, ¿cuál será el perímetro de la figura 7?		A. $P_1=6$ $P_2=12$ $P_3=18$ ... $P_7=24$ B. $P_1=6$ $P_2=12$ $P_3=18$ ... $P_7=42$ C. $P_1=6$ $P_2=18$ $P_3=30$ ... $P_7=30$ D. $P_1=6$ $P_2=18$ $P_3=30$ ... $P_7=36$

Tomado del Calendario Matemático

COLEGIO REINA DE LA PAZ

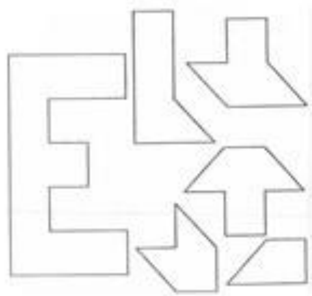
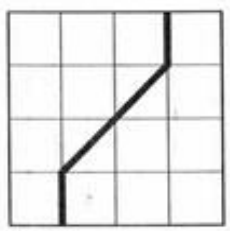
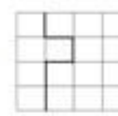
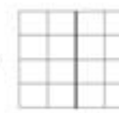
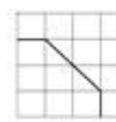
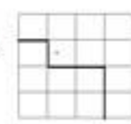
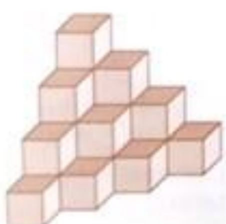
Post test #1

SITUACION	PROCEDIMIENTO	RESPUESTA
 Uno de los doce cuadrados es diferente a los demás, ¿cuál es? Ejercicio 1		A.  C.  B.  D. 
 El cuadrado ha sido dividido en cuatro partes. ¿Es cierto que todas tienen la misma área? Ejercicio 2		A. Sí, porque tienen la misma cantidad de cuadros B. Sí, porque tienen la misma forma C. No, porque hay más sombreados que blancos D. No, porque tienen diferente forma
Con 30 cubos unitarios Alex puede formar una torre con base rectangular de 2x5 cubos. ¿Qué otras torres con base rectangular puede formar Alex? ¡Escribe una lista con todas las posibilidades indicando las dimensiones de la base y la altura en cada caso! Ejercicio 3		Respuesta libre

Tomado del Calendario Matemático

COLEGIO REINA DE LA PAZ

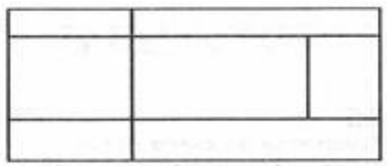
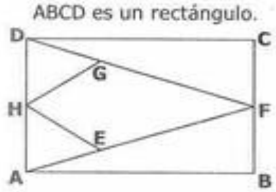
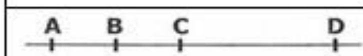
Post test #2

SITUACION	PROCEDIMIENTO	RESPUESTA
 Para construir la ficha E, sólo se utilizan cuatro de las fichas dadas, ¿cuáles son? Ejercicio 4		A.  B.  C.  D. 
La línea gruesa divide el arreglo 4×4 en dos regiones que tienen igual área e igual perímetro. ¡Verifícalo! Encuentra otras formas diferentes de dividir el arreglo 4×4 en dos regiones de igual área e igual perímetro.  Ejercicio 5		A.  C.  B.  D. 
 ¿Cuántos cubos unitarios faltan para construir un cubo que tenga cuatro cubos de arista? Ejercicio 6		A. 9 cubos B. 19 cubos C. 45 cubos D. 64 cubos

Tomado del Calendario Matemático

COLEGIO REINA DE LA PAZ

Post test #3

SITUACION	PROCEDIMIENTO	RESPUESTA
 Sebastián encontró 15 rectángulos en esta figura. ¿Cuántos rectángulos puedes tú encontrar? Ejercicio 7		A. 15 B. 16 C. 17 D. 18
ABCD es un rectángulo.  El ángulo ∠DHE es obtuso. ¡Explica! Nombra tres ángulos agudos, tres ángulos rectos y tres ángulos obtusos. Ejercicio 8		A. Agudos: <CDF, <DFC, <FAB Obtusos: <HEF, <HGF, <DHE Rectos: <CDF, <CDA, <DAB B. Agudos: <CDF, <DFC, <FAB Obtusos: <HEF, <HGF, <DHE Rectos: <CFD, <CDA, <DAB C. Agudos: <CDF, <GFE, <FAB Obtusos: <HEF, <HGF, <DHE Rectos: <ABC, <CDA, <DAB D. Agudos: <AFB, <FCD, <FAB Obtusos: <HEF, <HGF, <DHE Rectos: <CDF, <CDA, <DAF
 La distancia entre **A** y **C** es 10 cm. La distancia entre **B** y **D** es 15 cm. La distancia entre **A** y **D** es 22 cm. ¿Cuál es la distancia entre **B** y **C**? Ejercicio 9		A. 1 cm B. 2 cm C. 3 cm D. 4 cm

Tomado del Calendario Matemático

Anexo 6. Formato de validación

FORMATO DE VALIDACIÓN

El presente formato emerge de una investigación cuantitativa que tiene por objetivo *determinar en qué medida el uso del Calendario Matemático incide positivamente en la resolución de problemas, específicamente, geométricos, en estudiantes de cuarto grado de primaria del colegio Reina de la Paz*. Para esto, se definieron cuatro niveles para clasificar los problemas geométricos del Calendario Matemático (Nivel I); cada nivel está asociado a las habilidades matemáticas que exigirían su solución.

A continuación, en la Tabla A, se presentan los niveles de los problemas y su respectiva descripción.

NIVEL DEL PROBLEMA	DESCRIPCIÓN
1	En el problema se: • Demanda identificar la información necesaria para hallar su solución ya que está de manera directa y clara. • Exige comprender fácilmente la comprensión del tipo de respuesta que se espera. • Supone reconocer objetos geométricos en dos dimensiones. • Requiere usar los números naturales para codificar, contar o medir. • Exige usar de conocimiento geométrico básico. • Involucra usar las transformaciones en el plano (rotación, traslación, simetría) • Requiere construir o descomponer figuras planas a partir de condiciones dadas.
2	Ademas de lo descrito en el nivel anterior, en el problema se: • Requiere el reconocimiento de figuras geométricas en superposición o figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños. • Exige el uso de atributos y propiedades de los objetos geométricos. • Demanda construir o descomponer sólidos a partir de condiciones dadas.
3	Ademas de lo descrito en los niveles anteriores, en el problema se: • Exige realizar deducciones con la información dada. • Requiere hacer manipulaciones aritméticas y establecer relaciones numéricas • Supone usar y aplicar reglas, conceptos y propiedades de los objetos geométricos. • Demanda crear o interpretar a una representación geométrica bidimensional o tridimensional. • Requiere comparar y ordenar objetos respecto a atributos medibles.
4	Ademas de lo descrito en los niveles anteriores, en el problema se: • Exige poseer un grado de abstracción y representación mental correcto de los objetos tridimensionales. • Requiere hacer manipulaciones algebraicas sencillas. • Requiere usar otros conceptos matemáticos no mencionados explícitamente en el problema. • Supone identificar patrones y regularidades • Exige reflexionar sobre los procesos que se necesitan o se emplean en la solución del problema. • Supone comprender y manejar conceptos matemáticos en contextos que sean nuevos o complejos.

Tabla A. Descripción de los niveles de los problemas definidos para el Nivel I del Calendario Matemático

Por favor, clasifique los 39 problemas geométricos anexos marcando, en las siguientes tablas, con una X el nivel que usted considera le corresponde a cada uno:

PROBLEMA		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
NIVEL	1																				
	2																				
	3																				
	4																				

PROBLEMA		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
NIVEL	1																			
	2																			
	3																			
	4																			

¿Alguna observación?

Agradecemos la colaboración brindada, y solicitamos la reserva en relación a la información aquí presentada ya que hace parte de una investigación en curso.

Atentamente,

Claudia Johanna Tristancho Argüello
Luz Genny Tristancho Argüello
Investigadoras

DATOS DEL EXPERTO

Nombre completo:
Título profesional:
Cargo e institución donde labora:

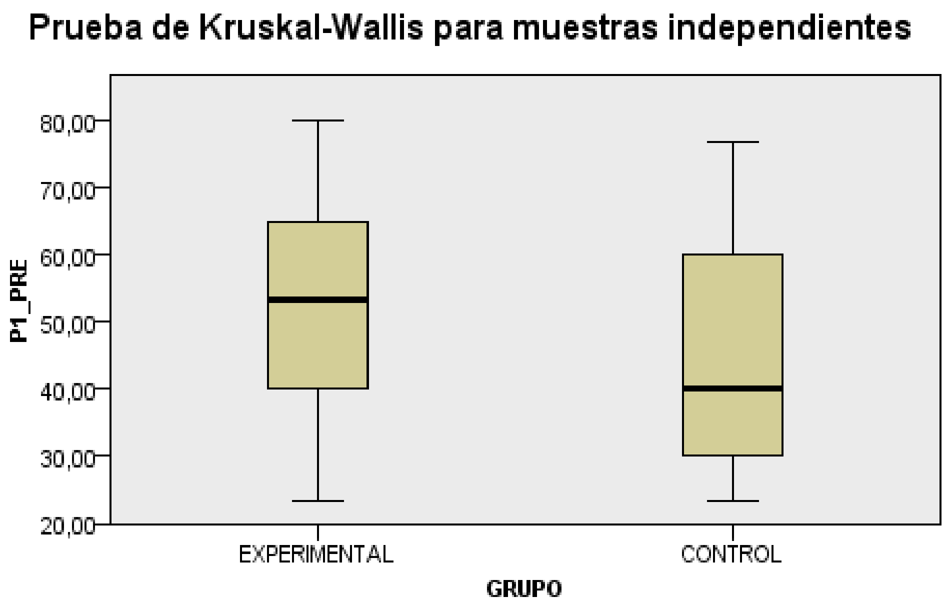
Firma (puede ser digital):

Anexo 7. Índice de validación de contenido CVR'

Ítem	Número de Acuerdos	Número de no acuerdos	CVR'	Aceptación	Clasificación Tipo Problema
1	4	0	1	Si	1
2	3	1	0,75	Si	3
3	4	0	1	Si	2
4	4	0	1	Si	2
5	4	0	1	Si	1
6	2	2	0,5	No	Ninguno
7	4	0	1	Si	2
8	2	2	0,5	No	Ninguno
9	3	1	0,75	Si	3
10	3	1	0,75	Si	1
11	4	0	1	Si	1
12	3	1	0,75	Si	3
13	3	1	0,75	Si	Ninguno
14	3	1	0,75	Si	3
15	3	1	0,75	Si	1
16	3	1	0,75	Si	3
17	3	1	0,75	Si	1
18	3	1	0,75	Si	1
19	3	1	0,75	Si	2
20	2	2	0,5	No	Ninguno
21	4	0	1	Si	1
22	3	1	0,75	Si	3
23	2	2	0,5	No	Ninguno
24	4	0	1	Si	3
25	4	0	1	Si	1
26	4	0	1	Si	1
27	2	2	0,5	No	Ninguno
28	2	2	0,5	No	Ninguno
29	3	1	0,75	Si	2
30	3	1	0,75	Si	1
31	3	1	0,75	Si	2
32	3	1	0,75	Si	3
33	2	2	0,5	No	Ninguno
34	2	2	0,5	No	Ninguno
35	4	0	1	Si	1
36	4	0	1	Si	1
37	3	1	0,75	Si	2
38	3	1	0,75	Si	1
39	3	1	0,75	Si	1

Anexo 8. Información adicional del Test de Kruskall-Wallis.

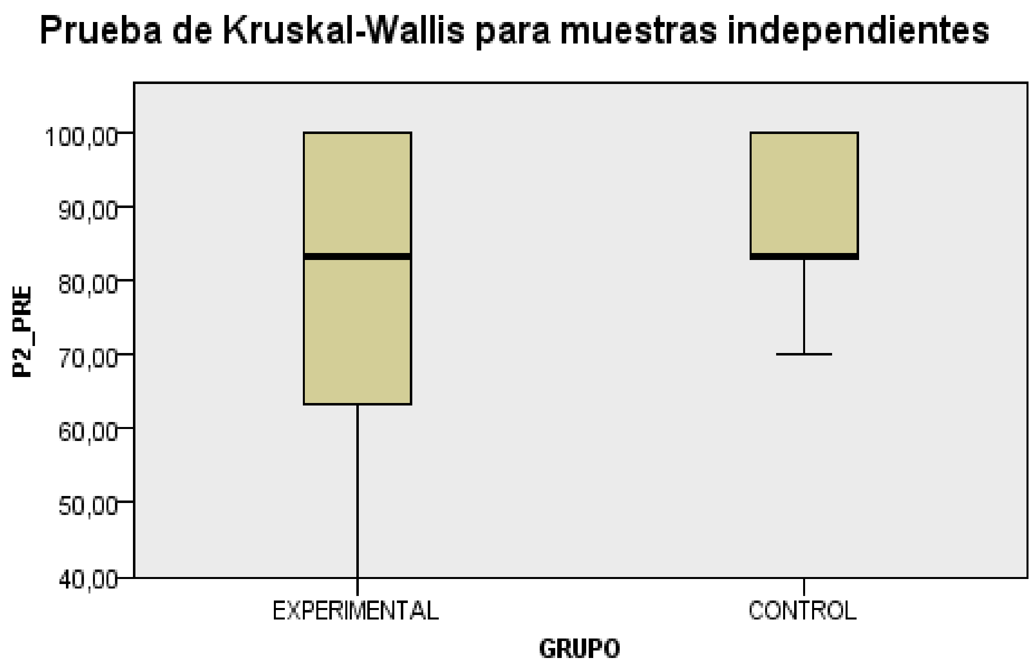
Prueba de Kruskal-Wallis para variable P1_PRE para muestras independientes Experimental Vs Control



N total	21
Estadístico de contraste	,612
Grados de libertad	1
Significación asintótica (prueba bilateral)	,434

1. Las estadísticas de prueba se ajustan para empates.
2. No se realizan múltiples comparaciones porque la prueba global no muestra diferencias significativas en las muestras.

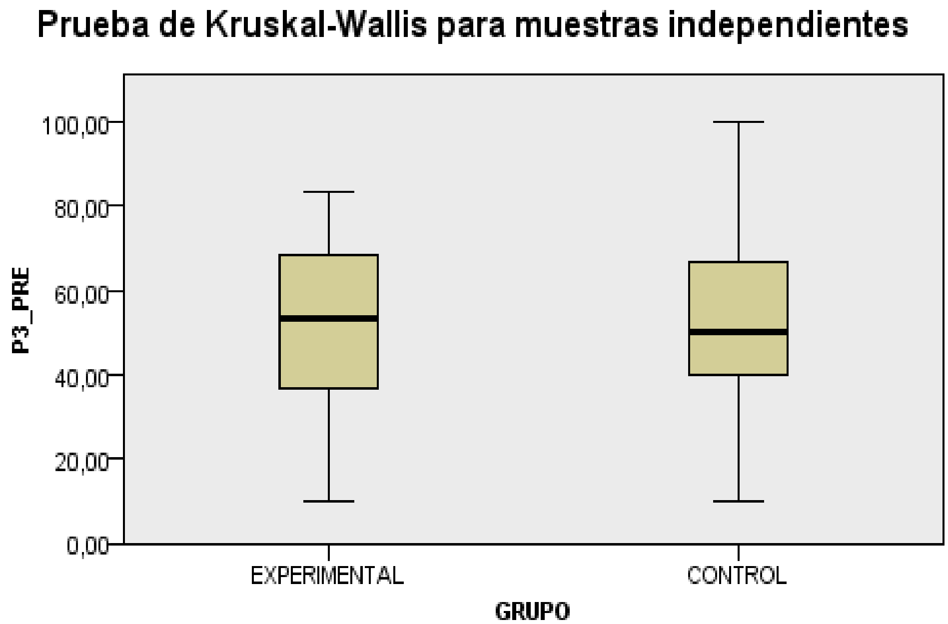
Prueba de Kruskal-Wallis para variable P2_PRE para muestras independientes Experimental Vs Control



N total	21
Estadístico de contraste	,195
Grados de libertad	1
Significación asintótica (prueba bilateral)	,659

1. Las estadísticas de prueba se ajustan para empates.
2. No se realizan múltiples comparaciones porque la prueba global no muestra diferencias significativas en las muestras.

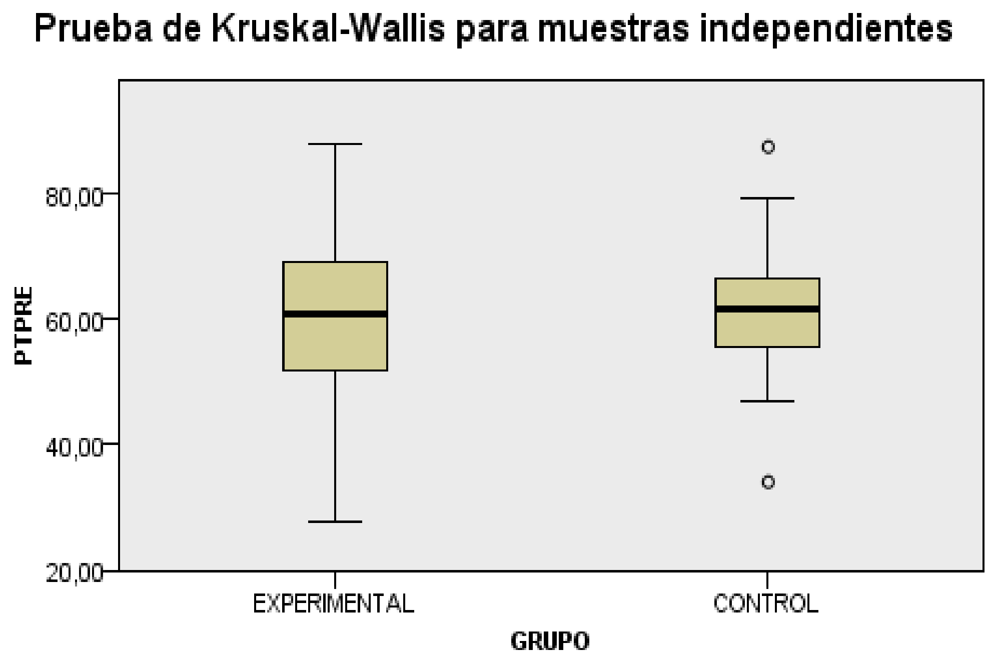
Prueba de Kruskal-Wallis para variable P3_PRE para muestras independientes Experimental Vs Control



N total	21
Estadístico de contraste	,020
Grados de libertad	1
Significación asintótica (prueba bilateral)	,887

1. Las estadísticas de prueba se ajustan para empates.
2. No se realizan múltiples comparaciones porque la prueba global no muestra diferencias significativas en las muestras.

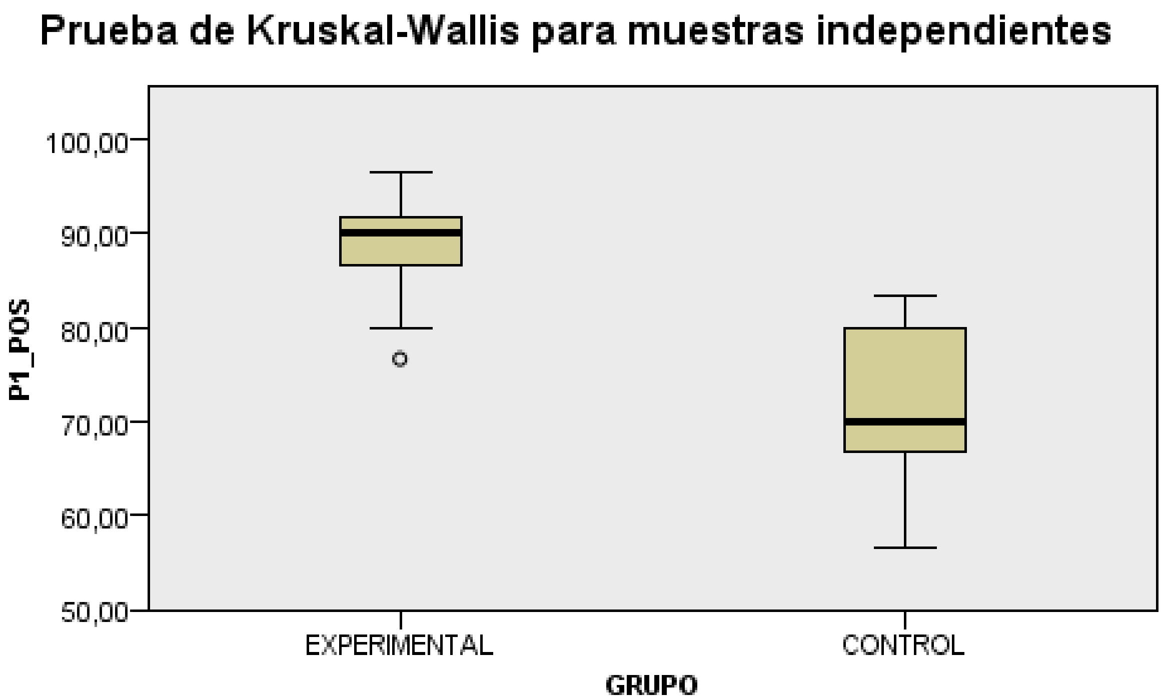
Prueba de Kruskal-Wallis para variable Puntaje Total para muestras independientes Experimental Vs Control



N total	21
Estadístico de contraste	,001
Grados de libertad	1
Significación asintótica (prueba bilateral)	,972

1. Las estadísticas de prueba se ajustan para empates.
2. No se realizan múltiples comparaciones porque la prueba global no muestra diferencias significativas en las muestras.

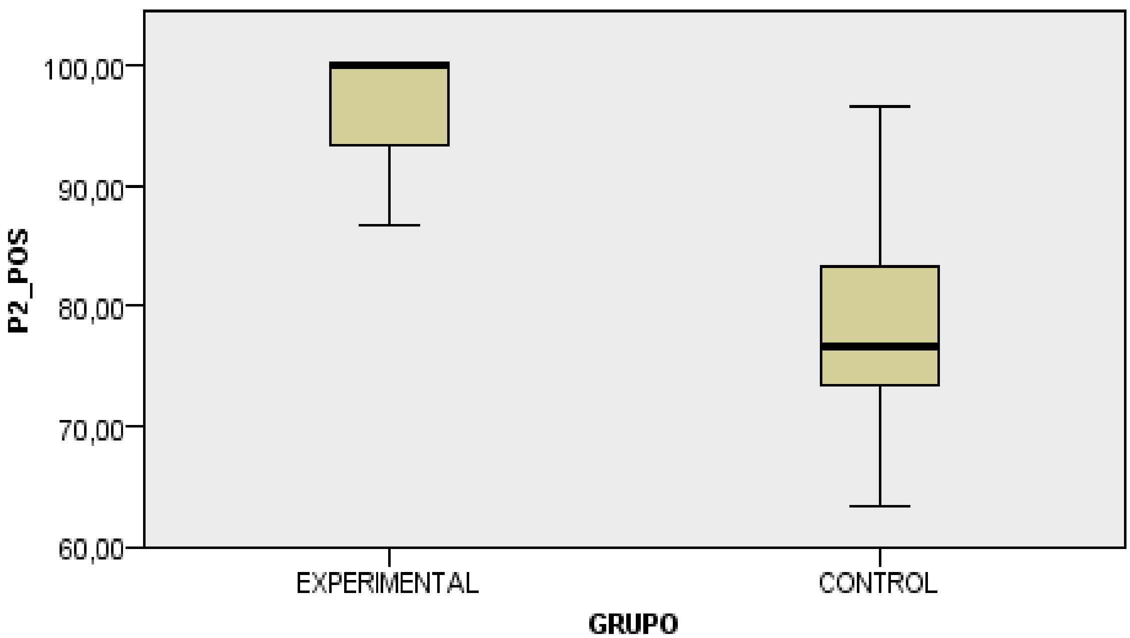
Anexo 1. Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes.



N total	21
Estadístico de contraste	12,576
Grados de libertad	1
Significación asintótica (prueba bilateral)	,000

1. Las estadísticas de prueba se ajustan para empates.
2. No se realizan múltiples comparaciones porque hay menos de tres campos

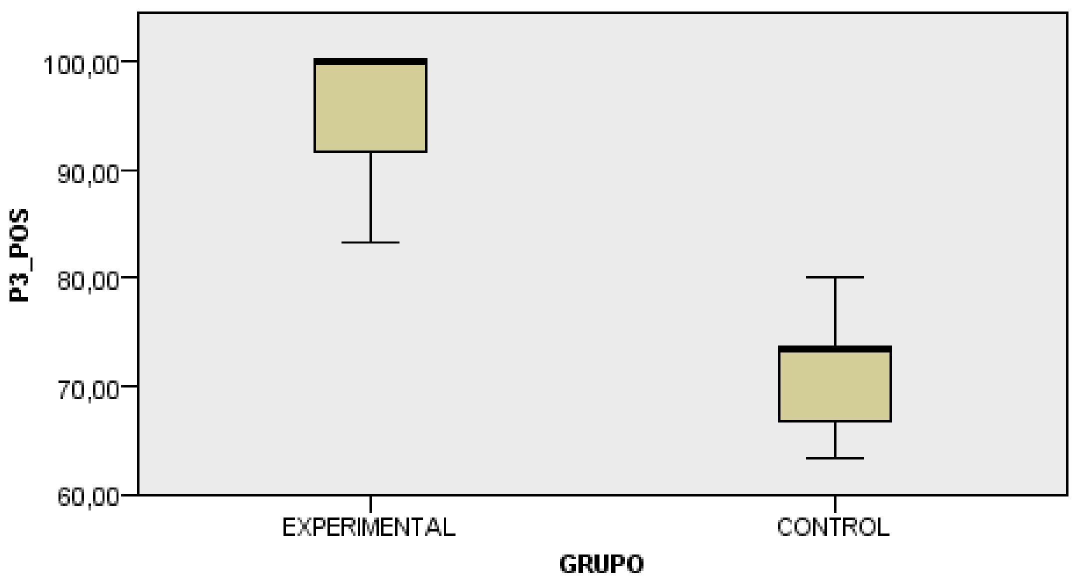
Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes



N total	21
Estadístico de contraste	12,737
Grados de libertad	1
Significación asintótica (prueba bilateral)	,000

1. Las estadísticas de prueba se ajustan para empates.
2. No se realizan múltiples comparaciones porque hay menos de tres campos.

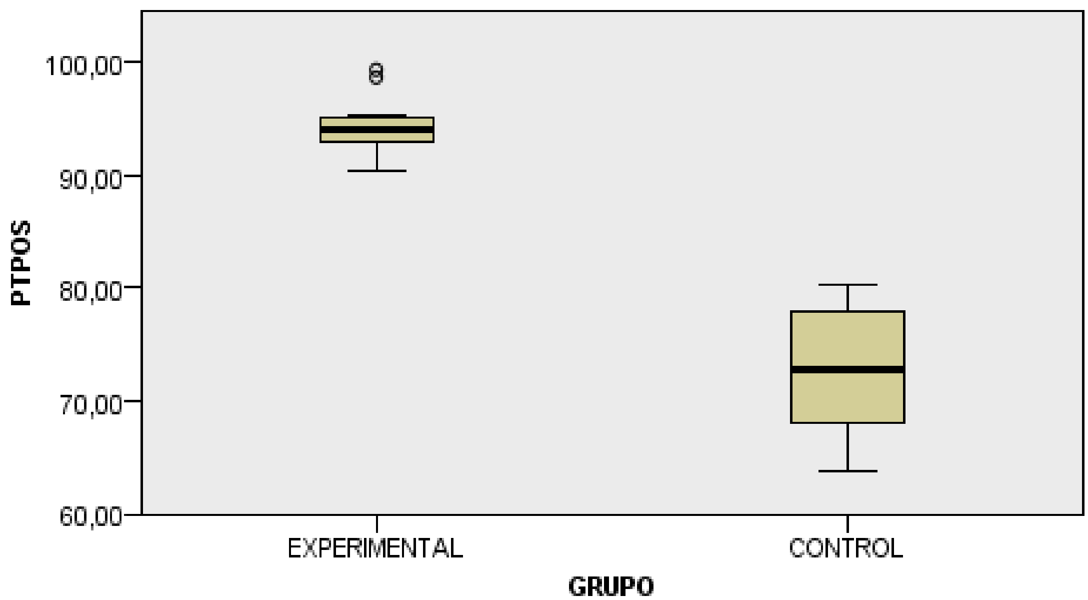
Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes



N total	21
Estadístico de contraste	15,462
Grados de libertad	1
Significación asintótica (prueba bilateral)	,000

1. Las estadísticas de prueba se ajustan para empates.
2. No se realizan múltiples comparaciones porque hay menos de tres campos.

Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes



N total	21
Estadístico de contraste	15,020
Grados de libertad	1
Significación asintótica (prueba bilateral)	,000

1. Las estadísticas de prueba se ajustan para empates.
2. No se realizan múltiples comparaciones porque hay menos de tres campos.