UNIVERSIDAD PRIVADA NORBERT WIENER
Escuela de Posgrado

Tesis

USO DE LA HERRAMIENTA GEOGEBRA Y SU INFLUENCIA EN LA COMPRENSIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI EN ESTUDIANTES DE 8° DEL INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL PASCUAL BRAVO, MEDELLÍN 2016

Para optar el grado académico de
Magister En Informática Educativa

Presentada por
Lina Janeth Cano Lopera
Diana Alejandra Giraldo Duque

Lima – Perú 2017

Tesis

USO DE LA HERRAMIENTA GEOGEBRA Y SU INFLUENCIA EN LA COMPRENSIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI EN ESTUDIANTES DE 8° DEL INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL PASCUAL BRAVO, MEDELLÍN 2016

Línea de Investigación Aplicada

Asesora

Dra. EDITH GISSELA RIVERA ARELLANO

DEDICATORIA

A nuestros padres, nuestras familias, asesores y compañeros que siempre dieron su apoyo y colaboración incondicional.

Diana Alejandra Giraldo Duque

A mi padre Diego Cano Vásquez (Q.E.P.D.) a quién siempre admiré por su inteligencia y creatividad y quién nos enseñó años atrás, al fractal referido en esta tesis.

Lina Janeth Cano Lopera

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Universidad Wiener por la colaboración de cada uno de los asesores y tutores que contribuyeron para la construcción de esta investigación, por sus enseñanzas y aportes que condujeron a la finalización exitosa de la misma.

Agradecemos a los directivos del Instituto Técnico Pascual Bravo, por proporcionar los espacios pertinentes para el desarrollo de esta investigación y a los estudiantes del grado 8° por su disposición para el aprendizaje.

Agradecemos a nuestros amigos que nos proporcionaron su apoyo incondicional.

Agradecemos a nuestras familias que nos motivaron y nos dieron su apoyo constante para la terminación de esta investigación.

DECLARATORIA DE AUTENTICIDAD

Quienes suscribimos: Diana Alejandra Giraldo Duque y Lina Janeth Cano Lopera identificadas con cédulas de ciudadanía 42792173 de Medellín y 43569430 de Medellín, declaramos que la presente tesis "USO DE LA HERRAMIENTA GEOGEBRA Y SU INFLUENCIA EN LA COMPRENSIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI EN ESTUDIANTES DE 8° DEL INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL PASCUAL BRAVO, MEDELLÍN 2016" ha sido construida por nosotras, usando y aplicando la literatura científica referente al tema, precisando la bibliografía mediante las referencias bibliográficas que se consignan al final del trabajo de investigación. En consecuencia, los datos y el contenido, para los efectos legales y académicos que se desprenden de la tesis son y serán de nuestra entera responsabilidad.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

El objetivo principal de la presente investigación fue determinar en qué medida el uso de la herramienta GeoGebra influyó en la comprensión de las características de la construcción del triángulo de Sierpinski.

La investigación corresponde a un diseño pre-experimental dentro del diseño explicativo cuantitativo, de tipo aplicada; se eligió una muestra no probabilística de 40 estudiantes del grado 8°, tomados de una población de 123 estudiantes del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo de Medellín del año 2016. Para el uso de GeoGebra, se realizaron 9 sesiones de 3 horas cada una y los datos se obtuvieron a través de una prueba tipo estandarizada bajo el modelo basado en evidencias, instrumento que permitió la recolección de los datos antes y después (pre y post test) del uso de Geogebra y fue validado por 3 expertos.

El Método usado fue la prueba de Kuder-Richarson 20, donde La confiabilidad del instrumento (prueba), arrojó el valor alto del 0,68401464. Se utilizó el estadístico Wilcoxon, que arrojó el valor de 19,5 para una significación de 0,05, concluyendo que el uso de la intervención de Geogebra demuestra que influyó de manera significativa en la comprensión de las características del triángulo de Sierpinski al comparar el grupo antes y después de su uso.

Los resultados fueron significativos en la comprensión de las dimensiones de las características de auto similitud (4,5) y área cero y perímetro infinito del triángulo de Sierpinski (14,5), sin embargo para la característica de la dimensión fractal no puede concluirse que fue significativo, observado en los resultados de la prueba.

Palabras clave: Geogebra, Triángulo de Sierpinski, Fractal

ABSTRACT

The main objective of this research is to determine in which measure the use of the GeoGebra tool affects the comprehension of the characteristics of the construction of Sierpinski's Triangle.

The research matches a pre-experimental design within the quantitative explicative design, of applicative type; a non probabilistic sample of 40 8th grade students, taken from a populace of 123 students of the Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo on Medellín on year 2016. For the use of GeoGebra, 9 sessions of 3 hours each took place and the data were gathered through a standardized test under the model based on evidences, a tool that allowed the recollection of the data before and after (pre and post test) the use of GeoGebra and was validated by 3 experts.

The used method was the Kuder-Richarson 20 test, where the reliability of the tool (test), thrown the high value of 0,68401464. The Wilson statistic was used, which thrown the value of 19,5 for a signification of 0,05, concluding that the use of the GeoGebra intervention shows that it had a significant influence in the comprehension of the characteristics of Sierpinski's Triangle while comparing the group before and after its use.

The results were significant for the comprehension of the characteristics of auto similarity (4,5), zero area and infinite perimeters of Sierpinski's Triangle (14,5), however for the fractal dimension characteristic it can't be concluded that it was significant, as seen in the test's results.

Keywords: Geogebra, Sierpinski's Triangle, Fractal

INTRODUCCIÓN

La motivación inicial para realizar la presente tesis fue impulsada por el uso de las herramientas tecnológicas en el aula de matemáticas a partir la pregunta de cómo estas herramientas podrían contribuir en el mejoramiento de la enseñanza de la geometría, específicamente en la comprensión de las características de un triángulo fascinante. Posteriormente se delimitó el tema y se eligió orientándolo a encontrar la relación entre la herramienta Geogebra y la comprensión de las características del triángulo de Sierpinski en I.T.I. Pascual Bravo de Medellín (Colombia), para alumnos del grado 8° del año escolar 2016.

Durante la investigación se encontraron diversas propuestas de la construcción de este triángulo usando la herramienta, algunos fueron estrictos en partir de un triángulo equilátero, otros no delimitaron la clase de triángulo. A medida que se fue investigando sobre las diversas construcciones en el marco teórico, se tomó la definición del matemático polaco Waclaw Sierpinski y de esta manera se centró la investigación en la comprensión de las características de la autosimilitud, del perímetro infinito y el área cero y de la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski.

Se contó con 3 magísteres altamente calificados para la validación de los instrumentos utilizados para la recolección de los datos de la variable Geogebra y la variable comprensión de las características del triángulo de Sierpinski donde se aplicaron pruebas antes y después del uso de la herramienta a los estudiantes del grado octavo del I.T.I. Pascual Bravo de Medellín 2016. Los resultados se presentan de forma cuantitativa para determinar la relación del uso de Geogebra y su relación con la comprensión de las principales características del triángulo de Sierpinski.

A lo largo de la presente tesis se desarrollan 5 capítulos:

El primer capítulo describe el planteamiento del problema que se centra en la realidad problemática, específicamente la ausencia del uso de herramientas tecnológicas y de la geometría fractal en el currículo del instituto Pascual Bravo para del grado octavo de la básica secundaria, que no están en conflicto con los actuales estándares mínimos de competencias del Ministerio de Educación Nacional, lo cual facilitaría trabajar el álgebra y la geometría de una manera visual y dinámica encajando con la realidad de la naturaleza. El triángulo de Sierpinski tiene algunas características que son muy particulares que extienden la visión de los estudiantes más allá de la geometría euclidiana.

En el segundo capítulo, se desarrolla el marco teórico presentando diversos antecedentes del ámbito nacional e internacional, y se presentan los que se acercan al tratamiento de GeoGebra en las aulas y su influencia en la comprensión de la geometría euclidiana y/o fractal, sin embargo no se encontró ninguna específica acerca de la comprensión de las características de la construcción del triángulo de Sierpinski usando dicho programa, razón por la cual se opta por una investigación pre experimental.

En el tercer capítulo se describe la metodología utilizada. Se opta por una investigación de tipo aplicada, un diseño pre-experimental dentro del diseño explicativo cuantitativo, se describe la población y la muestra tomadas del grado 8° de los estudiantes del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo de Medellín del año 2016. Se describe el instrumento utilizado y las pruebas usadas para validez y confiabilidad.

En el cuarto capítulo se analizan los resultados y se prueba la hipótesis. Se prueba la hipótesis general, donde se calcula el valor de W y el valor de Z, se muestra que el estadístico de Wilcoxon W forma una distribución normal. De esta forma se evalúa la hipótesis de la investigación y se evidencia un aumento significativo en el mejoramiento de los resultados obtenidos por los estudiantes después del tratamiento con Geogebra. Luego se realiza el análisis por dimensiones donde se encuentran diferencias con respecto al resultado general, específicamente en la dimensión de la variable denominada dimensión fractal.

En el quinto capítulo se presentan conclusiones y recomendaciones, principalmente lo que se refiere a los resultados del uso de la herramienta Geogebra que alcanza niveles significativos en la comprensión de las características de auto similitud y de la comprensión de la característica de área cero y perímetro infinito del triángulo de Sierpinski, sin embargo en la comprensión de las características de dimensión fractal del triángulo de Sierpinski no se alcanzan los niveles significativos en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016. Entre las recomendaciones esta principalmente, la aplicación de la herramienta GeoGebra en la comprensión de las características del triángulo de Sierpinski que se puede expandir de la geometría euclidiana a la geometría fractal.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Geogebra goza de un reconocimiento a nivel internacional como una herramienta intuitiva y flexible para geometría dinámica y ha causado en los últimos años un cambio significativo en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas de la básica de secundaria.

Actualmente por Geogebratube es posible compartir miles de archivos de Geogebra que permiten seguir el protocolo de construcción de diversas propuestas para construir el triángulo de Sierpinski, uno de los fractales más conocidos y que han cobrado importancia más allá del arte en los últimos años.

Sin embargo, en muchas de las construcciones que son publicadas desde diversos países y por estudiantes y docentes, no logran en la mayoría de los casos, establecer una relación entre las características principales de este fractal con la hoja de cálculo, dando como resultado construcciones casi meramente artísticas y que no concuerdan con la extracción del cuarto triángulo que se debe hacer en cada iteración para demostrar el área cero, el perímetro infinito o su dimensión fractal.

En Colombia, la introducción del uso de las TIC en el aula de matemáticas ha sido lenta y muchas veces la forma de enseñanza sigue siendo tradicional a pesar de las continuas capacitaciones que se realizan desde el ministerio de educación nacional, estos aprendizajes no trascienden al aula por diversas causas, entre estas que los docentes enfrentan infraestructuras limitadas en su entorno escolar.

El aprendizaje de la geometría en las instituciones colombianas en la básica secundaria se limita al uso de la tiza y el tablero por la falta de capacitación del manejo de Geogebra, infraestructura, entre otros de carácter técnico.

Una de las características más notables en la prácticas de aula de los docentes, es que la geometría euclidiana domina los currículos de las instituciones y solo en contadas ocasiones los docentes tratan la geometría fractal, que es básicamente ignorada, y ha sido menospreciada la potencialidad de los fractales en diversas áreas de la humanidad y sus aplicaciones a la vida real.

En Antioquía se han visto esfuerzos desde la gobernación, la alcaldía y el ministerio para capacitar a los docentes y dotar a los establecimientos educativos de salas de informática pero ha sido insuficiente o se tiene la infraestructura y los docentes de matemáticas continúan usando la metodología tradicional de la tiza y el tablero.

La enseñanza de la Geometría de las instituciones de Antioquia es de corte tradicional y los fractales no son parte del currículo a menos que el docente tome la iniciativa de enseñarlo generalmente más por lo visual que por su contenido matemático.

En el Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, se cuenta con buena infraestructura de la sala de sistemas, no está instalado el Geogebra lo cual no facilita la gestión del docente a la hora de usar el espacio. Los horarios deben concertarse con anticipación ya que el área de informática tiene la prioridad y la instalación del programa requirió de varios trámites con los encargados de la sala de informática.

En el currículo del instituto Pascual Bravo para del grado octavo de la básica secundaria, no aparece ni se ha tratado en ninguna forma la geometría fractal. Esto es común a la mayoría de las instituciones de Medellín. Incluir la geometría Fractal en el currículo conduce a otro tipo de geometría que no se ha tratado en el aula, abre las perspectivas geométricas de los estudiantes; por ejemplo el solo hecho de que el estudiante descubra que hay dimensiones diferentes a las que se tratan con la geometría euclidiana y que sin embargo incluirlo en el currículo no prescinde y concuerda con los estándares mínimos de competencias del MEN, se trabaja algebra y geometría de una manera más visual, dinámica y que encaja más con la realidad de la naturaleza. El uso de la tecnología facilita la enseñanza de estos, hay propiedades de los fractales que antes de las herramientas computacionales era muy difícil de explicar, y ahora que existen las herramientas algunos docentes todavía se resisten a usarlas. El triángulo de Sierpinski tiene algunas características que son muy particulares y extienden la visión de los estudiantes más allá de la geometría euclidiana.

La dimensión fractal es un tema desconocido en las aulas, como seres humanos nos limitamos a ver en 1, 2 y 3 dimensiones, pero se ignoran dimensiones fractales como la que presenta el triángulo de Sierpinski; las iteraciones visualizadas en la vista gráfica y la vista de la hoja de cálculo de Geogebra acerca más al concepto de dimensión fractal, algo difícil de imaginar si se hace con lápiz y papel.

En esta tesis se pretende encontrar que el uso de Geogebra facilita la comprensión de las características de los fractales a través del triángulo de Sierpinski para 40 estudiantes del grado octavo.

1.2. Identificación y formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿En qué medida el uso de la herramienta Geogebra influye en la comprensión de la construcción del triángulo de Sierpinski en estudiantes de 8° grado del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín 2016?

1.2.2. Problemas específicos

¿En qué medida el uso de la herramienta Geogebra influye en la comprensión de la construcción de las características de autosimilitud del triángulo de Sierpinski en estudiantes de 8° grado del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín 2016?

¿En qué medida el uso de la herramienta Geogebra influye en la comprensión de la construcción de las características del perímetro infinito y del área cero del triángulo de Sierpinski en estudiantes de 8° grado del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín 2016?

¿En qué medida el uso de la herramienta Geogebra influye en la comprensión de la construcción de las características de la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski en estudiantes de 8° grado del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín 2016?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Determinar en qué medida el uso de la herramienta Geogebra influye en la comprensión de la construcción del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° del instituto Técnico Industrial Pascual bravo, Medellín, 2016.

1.3.2. Objetivos específicos

- Determinar en qué medida el uso de la herramienta Geogebra influye en la comprensión de las características de auto similitud del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° del instituto Técnico Industrial Pascual bravo, Medellín, 2016.

- Determinar en qué medida el uso de la herramienta Geogebra influye en la comprensión de las características de perímetro infinito y área cero del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° del instituto Técnico Industrial Pascual bravo, Medellín, 2016.

- Determinar en qué medida el uso de la herramienta Geogebra influye en la comprensión de las características de la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° del instituto Técnico Industrial Pascual bravo, Medellín, 2016.

1.4. Justificación de la investigación

El propósito de la presente investigación es determinar en qué medida el uso de la herramienta Geogebra influye en la comprensión de la construcción del triángulo de Sierpinski en estudiantes de 8° grado, de tal forma que abre las posibilidades de enseñanza de las matemáticas a través de la herramienta

Geogebra en el Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo; ya que por años la metodología tradicional ha sido una constante.

De acuerdo a los referentes de calidad del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, específicamente en los lineamientos curriculares, se fundamenta la importancia del desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos en los estudiantes, donde renovación Curricular propuesta hace énfasis en el enfoque de la geometría activa, definiendo:

.“Para lograr este dominio del espacio se sugiere el enfoque de geometría activa que parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo. Se da prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas y a la importancia de las transformaciones en la comprensión aun de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos. Se trata pues de ‘hacer cosas’, de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna. Esta conceptualización va acompañada en un principio por gestos y palabras del lenguaje ordinario, hasta que los conceptos estén incipientemente construidos a un nivel suficientemente estable para que los alumnos mismos puedan proponer y evaluar posibles definiciones y simbolismos formales. Veamos la diferencia entre mostrar y hacer, entre observar y actuar, entre simbolizar y conceptualizar en algunos ejemplos concretos. La geometría activa es una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio”. (Lineamientos Curriculares; 1998: p 37-38)

En la presente investigación la geometría activa se evidencia en la construcción del triángulo de Sierpinski y la ayuda de las TIC para que los estudiantes comprendan las características de este, inicialmente a través del dibujo aparentemente estático, pero que el software Geogebra permite dinamizar, relacionando la imagen con la conceptualización, a través de la vista gráfica y la hoja de cálculo.

El desarrollo de la comprensión del pensamiento geométrico en los estudiantes se puede describir según el modelo de Van Hiele, y se estructura en 5 niveles:

"El Nivel 1. Es el nivel de la visualización, llamado también de familiarización, en el que el alumno percibe las figuras como un todo global, sin detectar relaciones entre tales formas o entre sus partes. Por ejemplo, un niño de seis años puede reproducir un cuadrado, un rombo, un rectángulo; puede recordar de memoria sus nombres. Pero no es capaz de ver que el cuadrado es un tipo especial de rombo o que el rombo es un paralelogramo particular. Para él son formas distintas y aisladas. En este nivel, los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son clases de figuras reconocidas visualmente como de "la misma forma".

El Nivel 2. Es un nivel de análisis, de conocimiento de las componentes de las figuras, de sus propiedades básicas. Estas propiedades van siendo comprendidas a través de observaciones efectuadas durante trabajos prácticos como mediciones, dibujo, construcción de modelos, etc. El niño, por ejemplo, ve que un rectángulo tiene cuatro ángulos rectos, que las diagonales son de la misma longitud, y que los lados opuestos también son de la misma longitud. Se reconoce la igualdad de los pares de lados opuestos del paralelogramo general, pero el niño es todavía incapaz *de ver el rectángulo como un paralelogramo particular. En este nivel los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son las clases de figuras, piensan en términos de conjuntos de propiedades que asocian con esas figuras.*

El Nivel 3. Llamado de ordenamiento o de clasificación. Las relaciones y definiciones empiezan a quedar clarificadas, pero sólo con ayuda y guía. Ellos pueden clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y dar argumentos informales para justificar sus clasificaciones; por ejemplo, un cuadrado es identificado como un rombo porque puede ser considerado como "un rombo con unas propiedades adicionales". El cuadrado se ve ya como un caso particular del rectángulo, el cual es caso particular del paralelogramo. Comienzan a establecerse las conexiones lógicas a través de la experimentación práctica y del razonamiento. En este nivel, los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son las propiedades de clases de figuras.

El Nivel 4. Es ya de razonamiento deductivo; en él se entiende el sentido de los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero aún no se hacen razonamientos abstractos, ni se entiende suficientemente el significado del rigor de las demostraciones.

Finalmente, el Nivel 5. Es el del rigor; es cuando el razonamiento se hace rigurosamente deductivo. Los estudiantes razonan formalmente sobre sistemas matemáticos, pueden estudiar geometría sin modelos de referencia y razonar formalmente manipulando enunciados geométricos tales como axiomas, definiciones y teoremas. (Lineamientos Curriculares; 1998: p 38-39)

Para el caso de la presente investigación, los estudiantes de octavo del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, se clasifican en el nivel 3, ya que identifican, construyen y relacionan propiedades del triángulo equilátero, su área y perímetro, además de las características adicionales que el programa Geogebra permite visualizar durante las construcciones realizadas, sin embargo no debe ser una descripción inflexible, ya que el modelo de Van Hiele está orientado a la didáctica clásica de la geometría euclidiana y en la construcción del triángulo de Sierpinski, los estudiantes entran a comprender conceptos de la geometría fractal a partir de cada iteración en la construcción del triángulo de Sierpinski, por lo tanto aparecen conceptos como autosimilitud, área cero, perímetro infinito y la dimensión fractal.

En el congreso Iberoamericano de ciencia, tecnología, innovación y educación, Assum, D; Guil, D; Malet, O. (2014), el artículo publicado: *El uso de GeoGebra en las aulas del Curso de Ingreso a la Universidad: los porqués de una elección*, argumentan el uso de Geogebra por 3 aspectos fundamentales, el primero es *el modo de entender las relaciones entre la Matemática y la "realidad"*, lo cual se pretende con la presente tesis, por ejemplo la dimensión fractal es una realidad que no es fácil de mostrar. El segundo aspecto se relaciona con lo que los autores llaman *la redefinición de prioridades en el campo ontológico*, lo cual se valora en el uso de GeoGebra en las construcciones visuales y no solo algorítmicas. El tercer aspecto es la didáctica de las matemáticas que valora y acompaña el ritmo de aprendizaje de los estudiantes.

Los autores de este artículo afirman que la tecnología no solo debe estar orientada a realizar tareas de manera más eficiente o en menos tiempo sino que el uso de la tecnología es capaz de potenciar la capacidad cognitiva del estudiante, lo cual es acorde a la presente investigación que usa a GeoGebra como herramienta para la comprensión de las características del triángulo de Sierpinski.

En el uso de la herramienta Geogebra, el estudiante puede visualizar la representación de una figura matemáticamente, al usar la vista gráfica y la vista hoja de cálculo, va en consecuencia de lo descrito en el artículo, donde se citan a Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato (2012):

> En consecuencia, la configuración de objetos y procesos asociados a una práctica matemática estará formada usualmente por dos componentes, uno visual y otro analítico, los cuales se apoyan sinérgicamente en la solución de la tarea correspondiente. El componente visual puede desempeñar un papel clave en la comprensión de la naturaleza de la tarea y en el momento de formulación de conjeturas, mientras que el componente analítico lo será en el momento de generalización y justificación de las soluciones. El grado de visualización puesto en juego en la solución de una tarea dependerá del carácter visual o no de la tarea y también de los estilos cognitivos particulares del sujeto que la resuelve (Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato ; 2012: p. 18).

Esta investigación promueve la enseñanza de la geometría fractal en el grado 8° con el fin de que el estudiante adquiera confianza en la resolución de problemas relacionados con la geometría y esto es posible ya que la herramienta Geogebra es un software de matemáticas con una interfaz muy intuitiva y eficiente que permite construir gráficas dinámicas de álgebra y geometría. Geogebra está en diversos idiomas que permiten compartir archivos con diversos usuarios del mundo, además de que su código es abierto y es gratis su instalación en tablets y computadores. Geogebra permite equilibrar lo práctico con lo conceptual innovando la forma de enseñar en el aula. Los autores del artículo *El uso de GeoGebra en las aulas del Curso de Ingreso a la Universidad, señalan como en su experiencia aplicada en el 2012, eligen a Geogebra como una herramienta que facilitará su implementación en el aula,* de donde se destacan la descarga gratuita del programa sin vencimiento, el idioma, su aplicabilidad y usabilidad como son la facilidad de aprendizaje y la consistencia (Lorés, Granollers y Lana, 2002: p.18).

Las construcciones compartidas por la comunidad de Geogebra permiten ver las construcciones de fractales con conceptos diversos de geometría. Estas construcciones desarrollan la comprensión del pensamiento métrico del estudiante, y según los estándares básicos de competencias del Ministerio de Educación Nacional de Colombia:

"El estudio de estas propiedades espaciales que involucran la métrica son las que, en un tercer momento, se convertirán en conocimientos formales de la geometría, en particular, en teoremas de la geometría euclidiana. Lo anterior implica relacionar el estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza; con la observación y reproducción de patrones (por ejemplo en las plantas, animales u otros fenómenos de la naturaleza) y con otras formas de

lectura y comprensión del espacio (elaboración e interpretación de mapas, representaciones a escala de sitios o regiones en dibujos y maquetas, etc.), entre otras muchas situaciones posibles muy enriquecedoras y motivadoras para el desarrollo del pensamiento espacial." (Estándares Básicos de Competencias; 2006: p 61)

Desde esta perspectiva, la presente investigación, justifica la construcción del triángulo de Sierpinski, no solo como un objeto de arte, diseñado tecnológicamente que motiva al estudiante a comprender los conocimientos formales de la Geometría euclidiana, partiendo de los estándares del pensamiento espacial : *"Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas*." (MEN; 2006; p 87) Y del pensamiento métrico*: "Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias*.*"* (MEN; 2006; p 88)

Estos estándares son el punto de partida para el diseño de las pruebas PRE y POST test de la presente investigación, siendo estos estándares básicos de competencias los que permiten el diseño de los indicadores que informan sobre lo que los estudiantes están comprendiendo.

Las características de los fractales permiten una justificación de la presente tesis desde el punto de vista del estudio de las matemáticas mismas. "La Geometría Fractal, llamada también "Geometría de la Naturaleza", es un conjunto de estructuras irregulares y complejas descritas a través de algoritmos matemáticos y computacionales; los cuales reemplazan a los puntos, rectas, circunferencias y demás figuras provenientes de la matemática tradicional. Estos objetos tienen como característica fundamental las propiedades de Autosimilitud y la de convivir en extraños paisajes formados por dimensiones fraccionarias.

Se define a un fractal como “un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas” (Mandelbrot, 1975: p. 17-18). Otra forma de definir un fractal es como “una figura, que puede ser espacial o plana, formada por componentes infinitos y que su principal característica es que su apariencia y la manera en que se distribuye estadísticamente no varía aun cuando se modifique la escala empleada en la observación”. (Pérez y Gardey, 2012)

Los fractales presentan diversas aplicaciones que están en estudio aún, en campos como en el arte, la industria, la cardiología, la geología, la física, la naturaleza y en el campo militar; son saberes importantes para comenzar a implementar la enseñanza de la geometría fractal en las instituciones, y la presente tesis abre la oportunidad de implementarlo en el Instituto Pascual bravo de Medellín, comenzando con el fractal denominado triángulo de Sierpinski.

El triángulo de Sierpinski es un fractal que se puede construir a partir de cualquier triángulo, para la presente tesis la definición será estricta para un triángulo equilátero. (Sabogal & Arenas; 2011: p 21).

Una vez establecida la definición, en las pruebas que evalúan a los estudiantes en la presente investigación, acerca de la comprensión de las características principales del triángulo de Sierpinski, se puntúan con un punto si la respuesta es correcta y cero puntos si es incorrecta.

La presente investigación se justifica legalmente desde la ley general de educación en su Artículo 1º, que dice:

> Objeto de la Ley. La educación es un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, de su dignidad, de sus derechos y de sus deberes. Y en el Artículo 5º**.-** Fines de la educación. De conformidad con el artículo 67 de la Constitución Política, el numeral 13. La promoción en la persona y en la sociedad de la capacidad para crear, investigar, adoptar la tecnología que se requiere en los procesos de desarrollo del país y le permita al educando ingresar al sector productivo. Decreto Nacional 114 de 1996, la Educación no Formal hace parte del Servicio Público Educativo (Ministerio de Educación Nacional, 1994, p. 1).

La justificación a nivel de los referentes de calidad referida a los estándares básicos de competencias de matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006. p. 86-87), se describen los estándares del ciclo 8° y 9°, que está acorde en el currículo del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, desarrollando competencias que están inmersas en cada uno de los 5 pensamientos matemáticos. La presente investigación realiza el test de acuerdo a los estándares de los pensamientos allí descritos en concordancia con lo aprobado por el consejo académico del instituto Pascual Bravo.

Lo importante de la investigación es que los currículos de geometría en la institución, sean enriquecidos con la geometría dinámica, incluyan la geometría fractal y que herramientas como Geogebra desarrollen en los estudiantes la capacidad de observar la realidad, la naturaleza y las aplicaciones de esta, en su cotidianidad y que les permita obtener un conocimiento más amplio de la geometría, más flexible para admitir diversas construcciones que desarrollan los 5 pensamientos matemáticos.

La novedad de la presente tesis radica en identificar si realmente los estudiantes logran comprender conceptos separados de la geometría euclidiana a través del uso de la herramienta Geogebra y así proponer e introducir al currículo de la institución el estudio de la geometría dinámica a través del estudio de la geometría fractal, específicamente con el triángulo de Sierpinski que siendo uno de los fractales más representativos presenta características únicas, destacables como su dimensión fractal, no solo fomentando lo artístico y el uso de TICs, sino ampliando las posibilidades de investigación de dicho triángulo desde la misma matemática y posibles aplicaciones de los fractales en diversas ciencias.

Esta aplicación en diversas ciencias, favorece la importancia de la naturaleza fractal y los avances tecnológicos que han crecido juntos en los últimos años, por lo tanto la geometría dinámica y las múltiples aplicaciones de los fractales no pueden seguirse desconociendo en las aulas de clase de matemáticas.

El trabajo se orientó hacia la investigación pre experimental, justificado bajo la revisión de la literatura, no hay investigaciones previas relacionadas con la presente tesis, además es adecuada a los objetivos y al planteamiento del problema.

En la práctica se realizaron dos pruebas, pre y post test, a una muestra de los alumnos de 8° del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo de Medellín, donde se realiza una prueba estandarizada inicial escrita, usando Lápiz y papel, con opciones múltiples con única respuesta y otra prueba estandarizada final aplicada después de realizar las 9 sesiones usando la herramienta Geogebra. La prueba requería de ciertos conocimientos básicos de geometría.

Para garantizar los conocimientos básicos necesarios, los saberes previos requeridos por el estudiante fueron: la clasificación de triángulos, el reconocimiento de las figuras geométricas básicas planas y sus características, los conceptos de área y perímetro de figuras básicas, los conceptos de punto medio, definición de segmentos, comprensión de la proporcionalidad, aplicación de operaciones básicas aditivas, multiplicativas y operaciones como la potenciación y logaritmación.

Para la organización de los datos se cuenta con herramientas como la hoja de cálculo, dónde se elabora la tabulación de las respuestas de los estudiantes pre y post test y las correspondientes pruebas de validez y fiabilidad.

1.5. Limitaciones de la investigación

Teóricamente una de las limitaciones de la investigación fue la necesidad de restringir el uso de Geogebra en 3D, para evitar condicionar al estudiante en que está trabajando una figura en tres dimensiones, lo que resulta más confuso visualmente para el estudiante de este grado es comprender que la dimensión fractal de la pirámide de Sierpinski es 2, que además de ser un número entero no corresponde a lo que sugiere el programa, esto con el fin de reflexionar sobre la conceptualización de dimensiones fractales.

El triángulo de Sierpinski, en la presente investigación es considerado como una figura limite resultante de una sucesión infinita de repeticiones de la regla dada sobre una figura original. Esta regla se toma para toda la investigación: "colóquese 3 reducciones a la mitad del original en los extremos de un triángulo equilátero y se hace uso de la misma regla n iteraciones", siendo n el número asignado para cada paso de la construcción del triángulo de Sierpinski . El problema podría admitir pasar de figuras con tonalidades grises o de color, y pasar de una codificación a color a partir de figuras en blanco y negro, lo cuál sería más complejo para estudiantes del ciclo analizado. Para esta investigación se restringe hacia la figura resultante blanca de cada iteración como una extracción que indica el vacío y las partes que suman áreas, serán negras; sin embargo en el proceso muchos estudiantes usan colores diferentes para interpretar el relleno de la figura, la salvedad se dá en que el estudiante logra diferenciar el concepto de vacío únicamente usando el color blanco.

Los Límites temporales de esta investigación corresponden al año lectivo 2016 y los limites espaciales, corresponden a la ciudad de Medellín, Antioquia, Colombia, en el Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo. Algunas de las fechas de las sesiones realizadas con los estudiantes fueron modificadas en el transcurso del año debido a diversas actividades del instituto, sin embargo se lograron cumplir a cabalidad.

La investigación se efectúa con los estudiantes del grado 8° correspondientes al ciclo de la básica secundaria, afianzado el uso de los estándares curriculares propuestos por el Ministerio De Educación Nacional de Colombia, preexistiendo una limitación de la geometría euclidiana referente a los estándares básicos legales para el grado que se orienta, la cual no se amplía hacia la geometría fractal.

La geometría euclidiana es protagonista en la enseñanza aprendizaje de la Geometría en el contexto del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo de Medellín. En las clases tradicionales se usan el transportador, la regla y el lápiz. El tablero, los marcadores y la clase magistral son comunes en la mayoría de los grados. En los cuadernos de geometría se ven figuras básicas de dos dimensiones y máximo simulaciones de figuras en 3D con gráficos de 3 ejes en el espacio. Los estudiantes al igual que los docentes solo usan las TIC ocasionalmente para la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, por razones de espacio y tiempo de las instalaciones, donde prima el uso de las salas para el área de informática. Se consigue solucionar la limitación logrando los espacios y tiempos disponibles para el uso de la sala en las 9 sesiones programadas.

Para los estudiantes de 8° es común ver en sus cuadernos la solución de problemas con el teorema de Pitágoras, la clasificación de los triángulos según sus lados y ángulos, la solución de áreas y perímetros finitos de figuras planas, que claramente tienen 2 dimensiones y que cumplen con el currículo institucional y los estándares de competencias del MEN (Ministerio De Educación Nacional, 2006: p. 86-87).

Es axiomático que para la geometría de la básica secundaria no sería posible que existieran más de 3 tipos de dimensiones. Algunos contados elementos como la línea recta, los triángulos, los cuadriláteros son los más comunes como elementos de estudio en estos grados.

Surge la necesidad de tomar la iniciativa de estudiar uno de los fractales lineales clásicos para abrir la posibilidad de enseñanza de la geometría fractal, cuyo desarrollo en los últimos años ha sido acompañado por el avance de la computación, pero que en las aulas y específicamente en el I.T.I. Pascual Bravo no ha sido un tema cercano al currículo.

Se propuso en esta investigación determinar en qué medida el uso de la herramienta Geogebra influye en la comprensión de las características del triángulo de Sierpinski, como una forma de iniciar la enseñanza aprendizaje de la Geometría fractal.

Al iniciar el año lectivo, se efectúa una revisión de la sala de informática y se garantiza su disponibilidad para su uso en el área de matemáticas, u otras áreas diferentes a tecnología. Se halló que Geogebra no estaba instalado y que los computadores, una vez reiniciados borraban todo tipo de instalación. Fue necesario llamar a los técnicos encargados para que instalaran directamente el programa en los PC.

Los horarios de matemáticas para la sala de informática fue otro obstáculo que se superó para que coincidieran con las horas en que la sala no estuviera ocupada por otros grados.

Otro de los limitantes se identificó a nivel de los estudiantes, es que no tenían el conocimiento de la herramienta Geogebra. Para superar este obstáculo se realiza un curso básico durante 4 semanas de clase, 2 horas semanales.

A nivel externo uno de los límites aparentes es que el ministerio de educación nacional presenta los estándares básicos de competencia para el ciclo 8° y 9° solo desde la perspectiva de la geometría euclidiana, pero realizando un análisis de cada uno de los pensamientos se consiguió lograr una conexión que cumple tanto con el MEN como con el currículo institucional, ya que la Geometría fractal contiene a la geometría euclidiana.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de la investigación

2.1.1. Antecedentes de ámbito nacional

Para hallar los antecedentes se filtraron en Google académico, las búsquedas de cada una de las variables individualmente (Herramienta Geogebra y triángulo de Sierpinski). Posteriormente se realizó una búsqueda conjunta de las variables y estos son algunos de los hallazgos colindantes a la actual investigación:

A nivel Nacional, se pueden encontrar como los más relevantes los siguientes antecedentes:

Vega, Juan Carlos realizó la investigación titulada *"Concepciones En Torno Al Infinito Actual: Análisis Mediado Por El Software Cabri Geometre*" Cuyo objetivo fue Implementar una serie de situaciones problema mediadas por el software Cabri Geometre que permitieran identificar las concepciones que tienen los docentes de matemáticas de la comunidad Lasallista sobre infinito actual. Recurrió a la metodología empírica, donde "la investigación cualitativa implica la recogida de una gran variedad de materiales: entrevista, experiencia personal, historias de vida, observaciones, textos históricos, imágenes, sonidos, que describen la rutina y las situaciones problemáticas y los significados en la vida de las personas" (Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez, 1996, p. 4).

Adicionalmente, en el análisis de la información se utilizan elementos de la investigación cuantitativa, específicamente la inferencia estadística, para mostrar los resultados de la aplicación de los instrumentos diseñados. En los resultados obtenidos está que la visualización, modelización, simulación, exploración e interactividad que ofrecen los programas tales como Cabri Geometre, Derive, GeoGebra, Descartes, Regla y Compás, entre otros, que despiertan el interés de los educandos y principalmente desarrollan en ellos el pensamiento matemático que va más allá de la resolución de algoritmos y hallazgo de respuestas numéricas, secuelas que desafortunadamente se mantienen de la enseñanza básica tradicional. (Vega, 2014: p. 91)

.

Echeverry, Andrés Felipe realizó la investigación titulada *"Influencia del uso de Cabri Geometry Ii® En El Proceso De Enseñanza-Aprendizaje De Conceptos Básicos De Geometría"* Cuyo objetivo fue determinar la incidencia del uso de Cabri Geometry II® en el proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos básicos de geometría con estudiantes de sexto grado de la Institución Educativa Liceo Isabel la Católica. Esta investigación se plantea como correlacional, dado que busca determinar la influencia de una variable independiente (implementación de un software) en una variable dependiente (aprendizaje de conceptos básicos de geometría). Además, este proyecto tiene características de tipo cualitativo y cuantitativo, teniendo en cuenta que algunos resultados tienen carácter numérico y otros son descriptivos. Respecto al avance en el manejo de conceptos básicos de geometría y con base en los resultados de las pruebas realizadas, tanto para el grupo experimental como al grupo control, se puede concluir que fue positivo. Esto teniendo en cuenta, que en promedio, los puntajes de las pruebas finales fueron superiores a los de las pruebas iniciales. (Echeverry, 2013, p. 86)

Respecto a la prueba diagnóstica o pre-test para el grupo experimental se obtuvo un puntaje medio de 12,75 sobre un total posible de 37 puntos, respondiendo de forma correcta, en promedio, un 34,5% de la prueba. Para el grupo control, los resultados de este test fueron inferiores, con un valor medio de 10,63 y llegando a un 28,7% de rendimiento. A la luz de estos resultados es posible concluir que aunque en grados inferiores los estudiantes ya se habían tratado las temáticas relacionadas con el pre-test, el conocimiento y manejo de conceptos no es adecuado. (Echeverry, 2013, p. 86)

A nivel local en la región cafetera se encontraron muy pocas referencias, la mayoría enfocada como cursillos o sugerencias para el aula en blogs, complementamos con los siguientes antecedentes:

Rivera Henao y López Varona. (2012), en el artículo “Evidencia de propiedades fractales en la sucesión de Fibonacci usando wavelets” de Scientia et Technica Año XVII, No 52, muestra la existencia de una estrecha relación entre la geometría fractal, la divina proporción y la sucesión de Fibonacci; mediante la utilización de wavelets. La información que es relevante en este artículo para el trabajo es que se parte de una definición enunciada por Mandelbrot, Benoít en la cual se habla de autosemejanza a diferentes escalas. Tratan luego el tema de la divina proporción mostrando que el número áureo se puede expresar como un radical infinito y como una fracción continua infinita. Encuentran luego la ecuación en diferencias finitas para la sucesión de Fibonacci, que permite conocer el valor del número de oro con ayuda de una fracción continua infinita autosemejante, y por último, mediante la utilización de wavelets en Matlab evidencian la propiedad fractal de autosemejanza para dicha sucesión, esta última parte es relevante para la investigación que se realizó, tanto por el uso de software matemático como el concepto de autosemejanza. Como conclusión de esta investigación se da que para una función auto semejante, la transformación en wavelet presentará un comportamiento de auto semejanza. Existe una interesante cercanía entre los temas tratados en este artículo: la divina proporción, la sucesión de Fibonacci y la geometría fractal; y el uso de la transformada wavelet como una posible herramienta para evidenciarlo. Aunque no se menciona Geogebra, el uso de las herramientas tecnológicas son fundamentales para la construcción de ciertas características de los fractales. Se relaciona con es el estudio que realizado en la presentación que se hace del triángulo de Sierpinski como un objeto fractal, que presenta algo particular que lo diferencia de otros fractales, y es que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica. Mandelbrot (citado en Rivera, et al. 2012) Dicho triángulo también puede ser generado mediante un procedimiento llamado “el juego del caos” o partiendo de un triángulo de Pascal en el cual se suprimen los números pares. Se descubre en este objeto fractal cierto patrón de comportamiento que se repite a diferentes escalas, mostrando así la existencia de autosemejanza o autosimilaridad.

López, Omar realizo una investigación titulada *“Transformaciones de funciones con GeoGebra y moodle como mediadores didácticos”,* cuyo objetivo fue diseñar, aplicar y evaluar los resultados de una estrategia didáctica que lleve al estudiante de los grados undécimos a la elaboración e interpretación de diferentes tipos de transformaciones de funciones con GeoGebra y Moodle como mediadores didácticos. Esta investigación se realizó por el método de Investigación-Acción: es un tipo de investigación social aplicada que se caracteriza por la inmediatez y el grado de involucramiento del investigador. La idea central es que el investigador no es sólo un cronista de la realidad social sino un agente de cambio. La acción es parte integral de la investigación, son como los dos lados de una misma moneda. Implica la participación conjunta de las personas que van a ser beneficiarias de la investigación y de aquellos quienes van a hacer el diseño, la recolección y la interpretación de los datos para encontrar soluciones a las necesidades y requerimientos. Como resultado el software GeoGebra y la plataforma Moodle, se constituyó en una herramienta de considerable ayuda para el cumplimiento de los propósitos y objetivos educativos, al permitir que los alumnos se apropiaran del conocimiento y vivieran una experiencia matemática diferente. Con este procedimiento se logró motivar el aprendizaje de la elaboración e interpretación de gráficas de funciones en el Licant, así como también se impulsó el desarrollo de nuevas actividades en el aula, debido a que anteriormente no se había hecho uso de herramientas tecnológicas en las clases de matemáticas. Al manejar el GeoGebra los alumnos aprendieron cuándo utilizar la tecnología y cuando no, logrando un equilibrio respecto a la habilidad en el empleo de la tecnología y la tradicional forma de trabajo con lápiz y papel; pudieron verificar además sus propias conjeturas, gracias a las ayudas visuales proporcionadas por el software, así mismo lograron modificar sus hábitos de estudio, sus estrategias de aprendizaje y su actitud por el saber. La utilización del software GeoGebra, ayudo a comprobar lo realizado en clases, ya que su empleo es sencillo y práctico, por lo que no tuvieron problemas para usarlo después de que se les enseñó su manejo. El diseño y desarrollo de secuencias didácticas que realizaron empleando dicho software proporcionó un aprendizaje significativo, pues consideraron que es una nueva manera de aprender matemáticas; motiva, impulsa y sirve como complemento del aprendizaje, ya que conociéndolo le pudieron sacar mayor provecho. (López, 2013, p.78)

2.1.2. Antecedentes de ámbito internacional

Para optar al doctorado de la Universidad de Almería, García, María del Mar realizó la investigación, titulada *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula,* utilizó la metodología de investigación-acción, describe en su resumen que se explora la influencia de Geogebra en la transformación de actitudes relacionadas con las matemáticas y en el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes. Estudia el efecto que Geogebra ha potenciado en mayor grado a determinadas actitudes y competencias, encontrando ciertos atributos y ventajas de Geogebra asociados a tal mejora. (García, 2011, p. 491)

Martín, Nadia, en su tesis titulada *Diseño e implementación de una Actividad de Estudio e Investigación a partir de la pregunta ¿Cómo se construye un fractal* *teórico diseña e implementa una posible Actividad de Estudio e Investigación (AEI) para el estudio de fractales en sexto grado de la escuela secundaria*, En esta tesis, se construye y describe un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) cuya pregunta generatriz es Q0: ¿Cómo se puede construir un fractal? Se utiliza como referente teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard (1999, 2004, 2007, 2009, 2012, 2013). Los resultados permiten concluir que a pesar de las diferentes restricciones institucionales, los estudiantes y el profesor se involucraron en un nuevo tipo de trabajo que implicó modificaciones a nivel de la mesogénesis, la topogénesis y cronogénesis permitiendo incorporar algunas acciones propias de la Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo. (Martín, 2016, p. 20)

Mandelbrot (1997), conocido como el padre de los fractales, en su libro *"La Geometría Fractal De La Naturaleza"* Cuyo objetivo fue ser un documento en estudio, y de creciente interés para diferentes áreas. La computadora fue una gran herramienta para este auge de las matemáticas fractales en los años setenta, para trazar los más conocidos ejemplos de geometría fractal. Mandelbrot (1997) acuñó el término fractal para referirse a las dimensiones fraccionarias, un campo muy novedoso de la matemática aplicada que se trasladó a la naturaleza. Algunos ejemplos son el sistema circulatorio o los árboles, que ocupan un espacio de 2,4 dimensiones. Este libro de La geometría fractal de la naturaleza, reveló que los complejos contornos de nubes, costas y árboles, obedecen a un singular orden dentro del caos, y este caos puede ser abordado de manera vigorosa si se descubre el algoritmo que los configura. También se da la idea de lo cibi semejante en la cual los fenómenos a gran escala siguen los mismos patrones de la micro escala. Para el presente trabajo de investigación es relevante tener en cuenta varios capítulos de esta publicación, como lo es el capítulo I donde se trata la dimensión, simetría y divergencia, el capítulo IV sobre fractales escalantes, las relaciones entre longitud, área y volumen, el capítulo VI que trata de los fractales imagen de sí mismos como los capítulos que más se acercan a las características que se estudian del triángulo de Sierpinski, el libro de 682 páginas fue muy significativo para la presente investigación.

De esta información se concluye, que existen temas por explorar con respecto a la geometría fractal, y a pesar de que desde los años setentas se ha avanzado en la ciencia, la tecnología, la ingeniería, la medicina, entre otras, como contribución de los fractales, se ha identificado que los estudiantes actuales están desconociendo la existencia de estos. En el presente, el currículo de las del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo sigue enfocándose en la geometría euclidiana a través de la enseñanza tradicional, no queriendo decir con esto que no es necesaria la geometría euclidiana, sino que esta, es solo una parte de la geometría que se debería tener conciencia de que existe, desde los primeros años escolares de secundaria.

La relación de esta publicación con la actual investigación radica en la profundización de cada una de las características del triángulo de Sierpinski y como las herramientas computacionales pueden ayudar a su comprensión, lo cuál se analiza en el estudio de los estudiantes del ciclo de 8° del instituto.

García (2011) realizo la tesis doctoral titulada *“Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula, Almería, España 2011”* que dentro de sus objetivos esta Identificar las características de Geogebra que pueden influir en la transformación de determinadas actitudes relacionadas con las matemáticas, En esa investigación se analizaron 46 estudiantes: 24 y 22 estudiantes pertenecientes a los grupos 3º A y 3º B de la ESO, respectivamente y luego se redujo a una muestra de 12 estudiantes debido a la complejidad de los datos. Dentro de los Resultados obtenidos en el trabajo, la autora concluye que Geogebra, con sus atributos y ventajas sobre métodos más tradicionales de lápiz y papel, se muestra un software muy eficiente para potenciar una mejora actitudinal de los estudiantes. Dice que fue relevante para la mejora de las tres componentes analizadas (componentes cognitiva, afectiva y comportamental). La constructividad y la interactividad de Geogebra se distinguieron como los atributos más influyentes para la mejora de la componente cognitiva, pues la posibilidad de construir y tener actividad en todo momento, junto a la retroalimentación ofrecida por el software tras cada acción del estudiante, reforzó el bajo auto concepto de muchos de ellos y les hizo manifestar mayor confianza en sus posibilidades para afrontar con éxito la resolución de problemas durante las tareas con el software que la exhibida durante las tareas lápiz papel. (García, 2011, P.539)

También destaca como un aspecto negativo de la introducción de Geogebra como herramienta de trabajo en el aula señalados por Sordo, José (citado en García, 2011) durante la experiencia con el software se puso de manifiesto un inconveniente: la pérdida de tiempo de clase debido a problemas técnicos. La autora propone que sería interesante realizar más investigaciones sobre las posibilidades que pueden ofrecer las nuevas tecnologías para mejorar el proceso de enseñanza del profesorado y, por consiguiente, el proceso de aprendizaje del alumnado. Menciona que la mayoría de las investigaciones recientes se centran en el campo de la Geometría, siendo menos numerosas las que indagan sobre software algebraico o estadístico, que serían de utilidad para comprobar si los resultados obtenidos dependen de los contenidos matemáticos seleccionados o del propio software elegido para el estudio de los mismos. Este antecedente resulta una fuente útil para elegir la herramienta Geogebra de manera confiable para establecer las relaciones con la comprensión de las características del triángulo de Sierpinski, se diferencia con esta tesis en que no se analizarán las actitudes de los estudiantes ni se tratará la geometría euclidiana sino por el contrario trataremos el tema de la geometría fractal también inadvertido en las recomendaciones y en las diferentes actividades que realizó la autora.

2.2. Bases legales

2.2.1. Normas nacionales

El plan decenal del gobierno nacional, establece como meta a Colombia la más educada en el 2025 en América Latina, esto con el fin de que los estudiantes sean ciudadanos competentes y mejoren la calidad de la educación colombiana, esto se ha difundido a través de diferentes documentos del Ministerio de Educación

Nacional, entre estos los que se enfocan en los lineamientos que se refieren a nuevas concepciones sobre el currículo, los contenidos y la evaluación. La presente investigación se basa en los estándares de calidad para el grado 8°, apoyado en la Constitución Política de Colombia (1991) en el Artículo 67, que consagra la educación como un derecho fundamental y más aún una educación de calidad según el artículo 28 de la ley 1098 de 2006.

Los fines de la educación se establecen en la Ley 115 de 1994, se dan los objetivos para cada nivel y ciclo de educación formal, y la matemática está dentro de las áreas obligatorias y fundamentales del conocimiento, además se habla de cómo Proyecto Educativo Institucional PEI es de la autonomía de las instituciones educativas; complementando el decreto 1860 de Agosto 3 de 1994, en aspectos pedagógicos y sus desarrollos complementarios que permiten a los docentes conformar comunidades educativas de investigación que diseñen el currículo, hagan seguimiento, evaluación y retroalimentación del mismo como parte del PEI, por lo tanto al realizar la presente tesis se podrá estudiar la posibilidad de incluir en el currículo del Instituto técnico Pascual Bravo.

2.3. Bases teóricas

2.3.1. Variable independiente Herramienta GeoGebra

El uso de la herramienta GeoGebra está orientado a niveles de educación básica, educación media y educación a nivel universitario y para la presente tesis se centra en el nivel básico del grado octavo. En la conferencia de tecnología en matemáticas, dada por Hohenwarter, Markus; Lavicza, Zsolt (2010), se considera a GeoGebra como comunidad y futuro. En la página oficial se define como un software matemático interactivo de carácter libre, para la enseñanza y aprendizaje de geometría, álgebra y cálculo, lo cual permite que el uso de este sea posible en un contexto local como el Instituto Industrial Pascual Bravo de Medellín.

Geogebra es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar. GeoGebra es también una comunidad en rápida expansión, con millones de usuarios en casi todos los países. GeoGebra se ha convertido en el proveedor líder de software de matemática dinámica, apoyando la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics) y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo (Losada, 2007, p. 223-240).

La gratuidad y la facilidad de descarga para tabletas y computadores de escritorio e inclusive móviles, favorece el uso de GeoGebra en el contexto especifico del Instituto Técnico Pascual Bravo.

Geogebra, al usar la multiplataforma JAVA garantiza su portabilidad en Windows, que es el sistema operativo de los computadores de las salas de informática disponibles en el instituto Pascual Bravo, además de ser una herramienta gratuita y de código abierto que favorece su utilización en instituciones educativas del estado que restringen su presupuesto en la compra de programas, se encuentra en idioma español, lo cual provee la interacción más cercana con los estudiantes de grados 8°.

Geogebra es una multiplataforma muy confiable, reconocida por prestigiosos premios desde en su existencia en el 2001. La confiabilidad de la herramienta beneficia que las medidas que se tomen en el pre y post test reflejen el aprendizaje de los estudiantes en la comprensión de las características del triángulo de Sierpinski.

La Página oficial de GeoGebra es https://www.geogebra.org/, y es Markus Hohenwarter quién comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y en esta se describe como: “un software matemático multi-plataforma que nos ofrece la oportunidad de experimentar las extraordinarias percepciones que las matemáticas posibilitan” , por ejemplo la opción de percibir con el zoom, la autosimilitud del triángulo de Sierpinski a escala mayor o menor. Estas posibilidades son evidentes en el análisis que realiza Rafael Losada Liste, en su artículo: Geogebra de la intuición, publicado en el volumen 10, número 1 (enero-abril, 2007) Trainer of the GeoGebra Institute of Cantabria. En este artículo se clasifican en dos, algunos de los programas existentes clasificados como Sistemas de Álgebra Computacional y Sistemas de Geometría Dinámica. Los primeros permiten cálculos simbólicos y numéricos, y también representaciones simbólicas, en estos la mayor parte de Los comandos se introducen con el teclado. Se dan ejemplos como Derive, Mapple, Mathematica y MathLab entre otros. Los segundos, conocidos como Sistemas de Geometría Dinámica, permiten la introducción directa en la ventana gráfica de objetos geométricos y la representación dinámica de los mismos.

Ejemplos de estos son Cabri, Cinderella, cuyos comandos se introducen, fundamentalmente, con el mouse.

"Geogebra tiene algo de las dos categorías, pero no de forma separada, y esto es lo más interesante. Combina las representaciones gráficas y simbólicas ofreciendo ambas al mismo tiempo, lo que genera un gran valor añadido" (Losada. 2007, p. 223-239).

Esta definición es importante para la investigación realizada con los estudiantes del grado 8° ya que el estudio del algebra y la geometría a partir de la comprensión de las características del triángulo de Sierpinski, se analizan no solo desde la perspectiva geométrica que ofrece Geogebra, sino desde su análisis numérico. Esto es evidente para el trabajo realizado con la hoja de cálculo y la vinculación de las gráficas con las fórmulas, así los estudiantes descubren que la dimensión 2D que permite el software y los sentidos como la visión humana puede contrastar con los resultados algebraicos correctos que la herramienta facilita vinculando dichos resultados con los objetos construidos, para el caso, el triángulo de Sierpinski.

Desde la perspectiva de Geogebra como sistema de geometría dinámica, la construcción del objeto triángulo de Sierpinski, se limita a la geometría en el plano 2D. En la ventana gráfica se construye un objeto inicial e independiente, puede ser cualquier tipo de triangulo, pero se elige un triángulo equilátero; sus características iniciales son netamente euclidianas, y a medida que se le aplica la regla de construcción por iteración, en la vista algebraica de Geogebra se van creando objetos geométricos dependientes, como los puntos medios, las homotecias o la gestión de nuevas herramientas según la forma elegida por el estudiante para construirlo. Se pueden mover o cambiar con el mouse todas las condiciones iniciales, por ejemplo el área del triángulo inicial, y es fácil visualizar las modificaciones de tamaño de los objetos iniciales pero conservando la autosimilitud y facilitando la intuición del infinito del fractal. Es en este momento de la construcción que el estudiante se aproxima a comprender las características específicas de este fractal.

Una de las observaciones pertinentes que realiza Losada, Rafael en el artículo se refiere a que Geogebra fue diseñada especialmente para construcciones con regla y compás, geometría analítica y vectores, Geogebra es continuo a diferencia de Cabri que es determinístico en construcciones que pueden sufrir cambios inesperados cuando se mueven puntos o figuras iniciales. Es relevante para futuras investigaciones que partan de la actual, ya que la construcción del triángulo de Sierpinski, como fractal determinista, no influiría notoriamente su construcción en cualquiera de los dos programas, sin embargo para otros fractales si sería notorio.

Por el contrario, en los programas continuos, como Geogebra, muchas construcciones dependen de una serie de parámetros ocultos, predefinidos por el programador, por lo que la construcción adquiere mayor libertad y consistencia. Según Lozada (2007) en este tipo de programas existe el riesgo de que una serie de pasos que teóricamente nos debería devolver a la misma posición inicial no se consiga, pero este problema parece estar resuelto en Geogebra.

En la enseñanza de la geometría es indudable la importancia de la rigurosidad y la exactitud de los trazos para dar resultados confiables, así Geogebra además de favorecer la belleza de las construcciones con colores, grosores de las líneas, importación de imágenes, etc., ofrece la opción de transparencias, la herramienta permite aproximar y alejar, ver los pixeles para la extracción de los triángulos, que en las iteraciones es de vital interés de la presente investigación.

El suavizado de las líneas, llamado antialiasing, se puede exportar la zona gráfica como una imagen vectorial (EPS). Esto es importante para el acercamiento del triángulo de Sierpinski para visualizar la autosimilitud.

El software recoge en la práctica la totalidad de las herramientas de los programas clásicos como Cabri. Su principal característica diferenciadora es el tratamiento algebraico de los elementos geométricos dibujados de forma clásica.

Sus ventajas sobre Cabri y otros programas similares son los que se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente. Permite manejarse con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función, como raíces o extremos.

Sus rutinas analíticas permiten su uso como instrumento para el estudio de funciones como un programa clásico de representación gráfica y de tratamiento de puntos notables: corte con los ejes, extremos, función derivada, integral, etc.

Permite grabar los ficheros en formato HTML para ser utilizados con cualquier navegador.

Geogebra permite exportar archivo a:

- PNG (formato de imagen - pixeles): Este formato archivo de imagen, es preferencial para manejo digital no impresa y en su uso de presentaciones y videos.

- PDF (documento): Preferencial para guardar archivos que contengan textos, tablas y sus imágenes para entrega de documentos o informes.

- EPS (formato vectorial editable): El formato de archivo de lenguaje PostScript encapsulado (EPS) puede contener tanto gráficos vectoriales como de mapa de bits y lo admiten prácticamente todos los programas de gráficos, ilustraciones y diseño de páginas web. Este formato guarda el trabajo realizado sin alterar su contenido. Puede abrirse en cualquier programa para creación de vectores, por ejemplo: Adobe Illustrator y photoshop.

- SGV (imagen vectorial): SVG es un formato vectorial. Es escalable, pesa poco y permite una definición mayor a tamaños reducidos, mucho mayor que los archivos bitmap. El formato es igual al que se utiliza con cualquier programa vectorial como Corel Draw o Adobe Illustrator.

- HTML (formato para página web): Permite guardar la imagen liviana para subirla a páginas web y ser utilizados en cualquier navegador. Geogebra guarda en este formato para subir estos archivos como recurso en su sala interactiva.

- GIF (creación de imágenes animadas): Este formato es utilizado por su alta capacidad de compresión de la información de una imagen. Utilizado para animación de imágenes y guardar una imagen liviana, utilizada para medios digitales, preferiblemente en el uso de páginas web.

Cada formato conservan las diferentes necesidades de presentación del archivo, ya sean en imágenes vectoriales o pixeles.

Geogebra como permite importar imágenes (gif, jpg, tif o png) y tratarlas como mapas de bits significa que podemos usar fotos, patrones visuales o dibujos no sólo para integrarlos en el escenario (como imagen de fondo, por ejemplo) sino como propios objetos geométricos susceptibles de transformaciones (traslación, homotecia, reflexión, rotación o distorsión). Las imágenes importadas también disponen de índice de transparencia, lo cual favorece la intención de representar la extracción de los triángulos en cada iteración. La práctica opción del menú Captación de puntos a la cuadrícula permite situar fácilmente puntos en coordenadas precisas con un solo clic.

Geogebra como Sistema de Álgebra Computacional, permite ver en la vista hoja de cálculo, datos consignados en las celdas o que pueden introducirse como fórmulas. En la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski, las fórmulas matemáticas permiten el acercamiento al concepto.

También la combinación de Geogebra como un DGS y CAS, donde la hoja de cálculo se usó para analizar los datos y verificar la existencia de una correlación entre la vista y la tabla, se vinculan los gráficos y los cálculos matemáticos, como por ejemplo el área de los triángulos extraídos y el desplazamiento de la gráfica que generan cambios simultáneos que corresponden a la manipulación directa con el mouse.

Al momento de trazar segmentos, triángulos, etc., Geogebra siempre identifica los puntos sobre un plano, asignando valores a sus coordenadas que pueden identificarse en la vista algebraica, indicando siempre una representación en el plano, lo cual es de dos dimensiones. Surge la cuestión de la representación simbólica del triángulo de Sierpinski en un plano cuya dimensión es 2 que contrasta con la dimensión fractal de 1,57 aproximada del fractal. Sin embargo cuando se trata de programas especializados para ilustrar fractales, se encuentran las mismas limitaciones, como HarFA, FracLab, Fractalyse, FracTop, Fractal3e, ImaCalc, Kindratenko, SimuLab, FracLac, entre otros, pero que algunos son costosos y otros no son tan amigables para estudiantes de la básica como si lo puede ser Geogebra.

Existe la comunidad de Geogebra que permite compartir y desarrollar diferentes construcciones geométricas a nivel mundial. Se plantean diferentes protocolos de construcción para un solo problema geométrico que pueden servir de complemento a las clases que realiza un docente.

Para el caso de la presente investigación, se consultaron diferentes construcciones del triángulo de Sierpinski realizadas por la comunidad internacional, discriminando por edades, si fueron realizadas desde el perfil de docente o de estudiante y si se adaptaban al concepto original de este fractal.

2.3.1.1. Dimensión 1: Vista gráfica

La Construcción con comando punto medio, es una de las construcciones más intuitivas, la cual es posible analizar por medio es el trazado de un triángulo, se toma cada lado del triángulo como un segmento y de cada uno de estos se traza un nuevo polígono uniendo dichos puntos medios. La opacidad del segundo polígono trazado se representa en blanco para ilustrar la extracción del mismo. No mostrar los puntos medios, crea una discontinuidad al acercar la figura trazada:

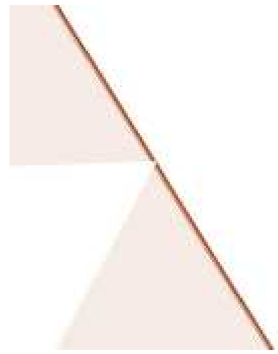


Figura 1. Zoom en punto medio

Fuente: Elaboración propia.

Esto puede ser imperceptible para los estudiantes, pero la rigurosidad de la definición del fractal se ve afectada.

Para esto se especifica la necesidad del color y grosor de las líneas del contorno del polígono correspondiente.

Protocolo de Construcción

Nº	Nombre	Ico...	Definición	Valor	Subtítulo
1	Punto A			A = (5.54, 4....	
2	Punto B			B = (2.52, -...	
3	Polígon...		Polígono[A, B, 3]	polígono1 ...	
3	Segme...		Segmento [A, B] de	a = 6.43	
3	Segme...		Segmento [B, C] de	b = 6.43	
3	Punto C		Polígono[A, B, 3]	C = (8.95, -...	
3	Segme...		Segmento [C, A] de	c = 6.43	
4	Punto D		Punto medio de A, C	D = (7.24, 1...	
5	Punto E		Punto medio de C, B	E = (5.73, -...	
6	Punto F		Punto medio de B, A	F = (4.03, 1....	
7	Triángul...		Polígono F, D, E	polígono2 ...	
7	Segme...		Segmento [F, D] de	e = 3.22	
7	Segme...		Segmento [D, E] de	f = 3.22	
7	Segme...		Segmento [E, F] de	d = 3.22	

7 / 7

Figura 2. Protocolo de construcción con punto medio

Fuente: Elaboración propia.

En la Construcción con comando homotecias, el protocolo de esta construcción se centra en el comando homotecias, cuyo factor de escala es ½. Se presenta el problema de opacidad al tratar la transparencia sigue apareciendo el color del triángulo original, y al igual que en el protocolo anterior, ocultar un punto indica una discontinuidad.

Protocolo de Construcción

Nº	Nombre	Ico...	Definición	Valor
1	Punto A			A = (4.28, 4.96)
2	Punto B			B = (-1.44, -4.84)
3	Polígono p...		Polígono[A, B, 3]	polígono1 = 55.75
3	Segmento a		Segmento [A, B] de Polígono polígono1	a = 11.35
3	Segmento b		Segmento [B, C] de Polígono polígono1	b = 11.35
3	Punto C		Polígono[A, B, 3]	C = (9.91, -4.89)
3	Segmento c		Segmento [C, A] de Polígono polígono1	c = 11.35
4	Punto A'		Homotecia de A, de razón 0.5 desde B	A' = (1.42, 0.06)
5	Punto A'_1		Homotecia de A, de razón 0.5 desde C	A'_1 = (7.09, 0.03)
6	Punto B'		Homotecia de B, de razón 0.5 desde C	B' = (4.23, -4.87)
7	Polígono p...		Polígono[B', A', 3]	polígono2 = 13.94
7	Segmento d		Segmento [B', A'] de Polígono polígono2	d = 5.67
7	Segmento e		Segmento [A', D] de Polígono polígono2	e = 5.67
7	Punto D		Polígono[B', A', 3]	D = (-1.44, -4.84)

22 / 22

Figura 3. Protocolo de construcción con Homotecias

Fuente: Elaboración propia.

En la Construcción con comando deslizador (encadena, secuencia, elementos) Este comando es dinámico y permite al usuario interactuar directamente con las iteraciones del triángulo. Este protocolo admite grises y colores en el triángulo, lo cual no permite visualizar correctamente la tendencia de área cero, por tanto hay que ser rigurosos con la opacidad de los triángulos extraídos.

Nº	Nombre	Ico...	Definición	Valor	S
37	Triángulo...		s_3[polígono1]	polígono16 = 1...	
38	Triángulo...		s_3[polígono2]	polígono17 = 2....	
39	Número ...	a = 2		POL2 = 0	
40	Lista L_1	{1,2}	{polígono2}	L_1 = {10.87}	
41	Número ...	a = 2		L1 = 0	
42	Lista L_2		Encadena[{Secuencia[S_1[Elemento[L_1, i]], i, 1,	L_2 = {2.72, 2.72, 2.72}	
43	Lista L_3		Encadena[{Secuencia[S_1[Elemento[L_2, i]], i, 1,	L_3 = {0.68, 0.68, 0.68, 0.68, 0.68, 0.68, 0.68,	
44	Lista L_4		Encadena[{Secuencia[S_1[Elemento[L_3, i]], i, 1,	L_4 = {0.17, 0.17, 0.17, 0.17, 0.17,	
45	Lista L_5		Encadena[{Secuencia[S_1[Elemento[L_4, i]], i, 1,	L_5 = {0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04,	
46	Lista L_6		Encadena[{Secuencia[S_1[Elemento[L_5, i]], i, 1,	L_6 = {0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,	
47	Lista L_7		Encadena[{Secuencia[S_1[Elemento[L_6, i]], i, 1,	L_7 = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,	
48	Lista L_8		Encadena[{Secuencia[S_1[Elemento[L_7, i]], i, 1,	L_8 = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,	

Figura 4. Protocolo de construcción con deslizadores

Fuente: Elaboración propia.

2.3.1.2. Dimensión 2: vista algebraica

Los Objetos Libres ampliar reducir Deslizador: La vista algebraica permite construir objetos libres según las necesidades de la construcción. Según el manual oficial, la posición o valor no depende de ningún otro objeto. Suelen crearse por ingreso directo en la Barra de Entrada o con alguna herramienta apropiada como, básicamente, la herramienta  Punto.

Los Objetos Dependientes, en la construcción del triángulo en forma manual no permite la agilidad de un cambio de alguna de las medidas de los lados o ángulos del triángulo, ya que es engorroso y los cálculos deben volverse a realizar y la medida que toman los estudiantes de manera manual no permitieron comparar las relaciones que se presentaron, en cambio a partir de Geogebra, los estudiantes pudieron visualizar que el cambio de uno de los lados o ángulos modifica las medidas de estos pero las relaciones permanecen constantes.

Los objetos auxiliares Permiten la continuidad de la figura, ya que si se ocultan los puntos de los vértices de los triángulos fue difícil para los estudiantes encontrar los puntos medios o usar el comando homotecias.

2.3.1.3. Dimensión 3: hoja de cálculo

Las últimas versiones de Geogebra han mejorado la integración de la hoja de cálculo con las construcciones de la hoja gráfica. Esta parte fue de importancia numérica para la comprensión de lo que el estudiante estaba realizando gráficamente, que la figura no solo se representara con colores llamativos o imágenes de fondo sin sentido pensadas desde el arte, sino que además de lo estético el estudiante logró comprender como al restar cada área esta tendía a cero, y el perímetro a infinito, un concepto que requiere una abstracción mayor si se usa el papel y el lápiz.

En cada iteración de la construcción del triángulo de Sierpinski se generan extracciones de áreas que equivalen a ¼ del triángulo de la iteración anterior. Cada estudiante ingresaba manualmente los datos en la hoja de cálculo ´para después establecer la relación que se generaba. Algunos lo hicieron de forma mecánica hallando el área del triángulo con el comendo área y no establecían la relación entre ellas. Pero luego de algunas iteraciones con la indicación de consignar los datos en una tabla sugerida inicialmente, la pregunta de la evaluación conduce a la observación hallada por los estudiantes de manera manual: “es muy difícil señalar el triángulo que uno necesita porque siempre señala el triángulo grande”, esta observación muy generalizada “obligo” a los estudiantes a construir la fórmula del área directamente en la hoja de cálculo e ingresar la fórmula de manera manual, pero no vincularon el gráfico.

Algunos de los estudiantes que tienen conocimiento previo de la hoja de cálculo, aplicaron la opción de arrastre que es muy similar a Microsoft Excel.

Los estudiantes más avanzados lograron vincular los datos de la hoja de cálculo con los datos de la vista gráfica. Esto permitió que observaran los cambios automáticos que se generaban al manipular con el mouse uno de los vértices del triángulo modificando su tamaño, etc.

Para el ingreso de datos manual, en las celdas, pueden ingresarse tanto números como cualquier otro tipo de objeto tratado por GeoGebra. Sean coordenadas de puntos, funciones, comandos, textos y cualquier objeto en general y, desde ya, los matemáticos y específicamente los geométrico en particular

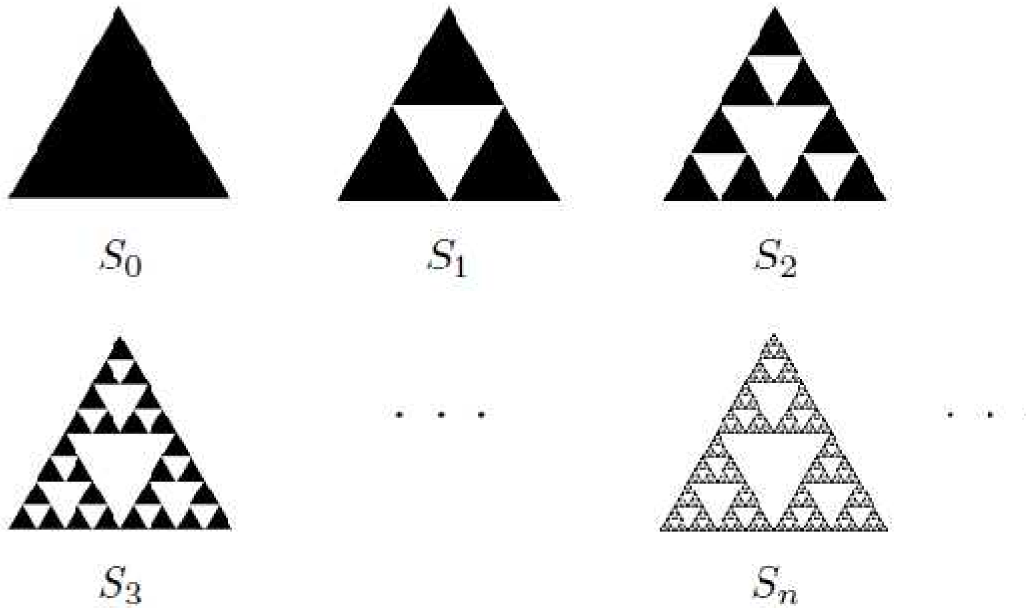
Para el arrastre para tabulación de datos puede rastrearse el registro de valores cambiantes de números, puntos y vectores así como de objetos de todo tipo: desde ya los geométricos y hasta los textos.

Para vincular datos de la vista algebraica, dada en la En la página oficial, obtenemos instrucciones que hablan que por omisión, la Vista algebraica se abre junto a la Vista Gráfica. La Barra de entrada aparece al pie de la ventana de GeoGebra (versión de Escritorio) o como una Línea de entrada integrada a la Vista algebraica (versiones Web y tabletas). La barra de herramientas gráficas se muestra en el margen superior de la ventana, con los botones Deshace / Rehace en la esquina superior derecha.

2.3.2. Variable dependiente construcción del triángulo de Sierpinski

Adoptaremos la definición del triángulo de Sierpinski para esta investigación, la dada por Sabogal & Arenas (2011):

> Consideremos un triángulo cualquiera junto con su interior, es decir “relleno”. Unamos los puntos medios de los lados del triángulo de modo que su interior queda dividido en cuatro triángulos, de los cuales eliminamos el triángulo central. En cada uno de los tres triángulos que quedan repetimos la misma construcción (unir los puntos medios de los lados y eliminar el triángulo central) obteniéndose nueve triangulitos, en cada uno de los cuales repetimos la construcción para obtener 27 triangulitos y así sucesivamente. De esta manera obtenemos una sucesión de figuras S1, S2, S3, . . ., Sn . . ., y la “ultima” figura es la que se conoce con el nombre de triángulo de Sierpiński (p. 21).



S1, S2, S3, . . ., Sn . . ., y la “ultima” figura es la que se conoce con el nombre de triángulo de Sierpinski.

Por supuesto que no es correcto decir la “ultima” figura, dado que, en teoría, el proceso de construcción descrito anteriormente nunca va a terminar; sin embargo, la sucesión de figuras sí parece “acercarse” a una figura en particular y es posible y correcto hablar de la “figura limite”, que intuitivamente es la figura hacia la cual tiende o se acerca nuestra sucesión (Sn)n. Uno de los objetivos del presente texto es proporcionar una definición formal de lo que aquí estamos llamando figura limite y obtenerla efectivamente como el limite matemático de una cierta sucesión en un cierto espacio métrico; esto lo haremos en el capítulo cuatro y se necesitara para ello todo el contenido de los dos capítulos anteriores. Sin embargo, si podemos en este momento definir formalmente el triángulo de Sierpiński como conjunto, mediante la intersección de la familia {Sn}n, es decir, si notamos S al triángulo de Sierpiński, entonces definimos,

$$\mathcal{S} := \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Este fractal lleva su nombre en honor al matemático polaco Waclaw Sierpiński2, 2Sierpiński Waclaw (1882–1969). Matemático polaco, nacido en Varsovia. Miembro fundador de la escuela matemática polaca moderna, junto con Janiszewski y Mazurkiewicz, que contribuyo al progreso de la teoría de conjuntos y de la topología y favoreció la consolidación de los fundamentos lógicos de las matemáticas. Llevo a cabo importantes investigaciones sobre teoría de números.

Esta definición es importante, ya que aclaró a los estudiantes que el triángulo central formado en la construcción de cada iteración debía considerarse retirado del área original; considerar el relleno del triángulo inicial también requiere la abstracción del concepto de área euclidiana pero que al avanzar a cada iteración y al retirar cada triángulo central, considerado como eliminado, produjo en el estudiante la idea intuitiva que el “blanco” sería el vacío, que al restarlo del área original esta tendía a cero.

2.3.2.1. Dimensión 1: Comprensión de la característica de la autosimilitud

Mandelbrot (1982), dice que “un objeto es autosimilar o autosemejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferente escala y hasta estar ligeramente deformada” (p. 31-32). El triángulo de Sierpinski cumple con una propiedad notable de los fractales que es la Autosimilitud. Esta propiedad es bastante intuitiva para los estudiantes del ciclo 8°-9° y es fácil mostrar como el triángulo inicial es una copia en diferentes tamaños más pequeños y que pueden hacerse copias cada vez más pequeñas de ese triángulo inicial.

Unas 5 iteraciones pueden mostrar una figura límite aceptable y que con la opción de acercar y alejar de Geogebra es posible hacerlo más intuitivo para los estudiantes, ya que con lápiz y papel hay un límite físico que involucra el material concreto. Los estudiantes pueden apreciar usando estos comandos como el conjunto de los 4 triángulos se repite a diferentes escalas y que al manipularlo con el mouse puede generar diversas escalas sin dañar las relaciones matemáticas que se presentan entre ellos.

Aunque la idea intuitiva del infinito es relativamente natural, Geogebra también presenta un “límite” para las iteraciones infinitas del triángulo pero el estudiante puede concluir que este fractal está formado por infinitas copias de sí mismo que pueden reducirse infinitamente. A esta propiedad también se le llama auto semejanza.

Esta propiedad no es exclusiva de la geometría fractal, de hecho es muy recurrente en la geometría clásica, cuando se dividen figuras en partes iguales o se identifican semejanzas y congruencias de los triángulos. Este hecho puede confundir al estudiante si se le habla de auto semejanza del triángulo de Sierpinski como una propiedad única. Se hace necesario incluir la característica de dimensión fractal.

Clasificación de triángulos

En el ciclo de 8° - 9° de la básica de bachillerato, la clasificación de los triángulos según sus lados o sus ángulos desde la geometría euclidiana que se imparte desde primaria debe estar clara para la construcción de diferentes situaciones problema. Para el caso de la investigación se planteó en el problema inicial un triángulo equilátero, sin embargo el uso de Geogebra facilitó la construcción de triángulos rectángulos y escalenos que lograron una figura límite aceptable pero que fuera claro qué tipo de triángulo trabajó el estudiante desde la opción que tomaba en el desarrollo del problema planteado.

Congruencia de triángulos

Desde la geometría euclidiana, si dos triángulos son congruentes, entonces sus elementos correspondientes son congruentes. También puede definirse y demostrarse la congruencia de dos triángulos por las propiedades L.A.L. (si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces son congruentes), A.L.A (Si un lado y los dos ángulos adyacentes de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro, entonces son triángulos congruentes) o L.L.L. (si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de otro, entonces los triángulos son congruentes). Estas propiedades de congruencia de triángulos son importante para reconocerlas en cada una de las iteraciones donde se forman 3 triángulos congruentes con el triángulo extraído, lo cual permite realizar la tabla en la hoja de cálculo que identifica varias secuencias, en las cuales los estudiantes identificaron secuencias numéricas.

Semejanza de triángulos

Dos triángulos pueden ser semejantes cuando sus ángulos son respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.

Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales, en Geogebra se usó la herramienta del menú que permite medir los ángulos, además se tuvo en cuenta los corolarios que hace referencia a: dos triángulos son semejantes cuando son equiángulos y dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales. Para el caso del triángulo equilátero es evidente la semejanza con los lados proporcionales entre cada iteración y el ángulo común a todos de 60°.

Dos triángulos son semejantes cuando tienen los tres lados proporcionales, Para el caso del triángulo en cuestión los lados entre cada iteración tienen una relación de ½.

Existen diversas formas de construir el triángulo de Sierpinski utilizando la herramienta Geogebra y esto se evidenció en las diferentes presentaciones de los estudiantes. Algunas de estas construcciones puedan aparecer a partir de la clasificación según los lados de un triángulo, por ejemplo a partir de un triángulo rectángulo:

Efecto tractor del triángulo

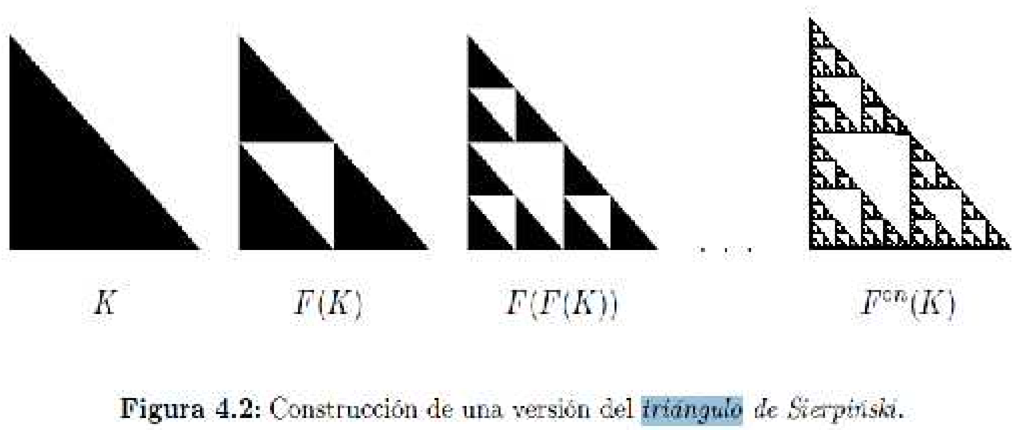


Figura 5. Construcción de una versión del triángulo de Sierpinski

Fuente: Giacinti, 2012.

Otras construcciones se realizan por homotecias y por puntos medio y también se logra la figura límite.

Dimensión 2: Comprensión de la característica de área cero y perímetro infinito

Perímetro y área euclidiana

Según Cardeño (2003), el área de una superficie cerrada, como la de un polígono, es el número de unidades cuadradas contenidas en su superficie y el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la longitud de un lado por la longitud de la altura de ese lado.

En la geometría euclidiana se define el área de un triángulo como la mitad del producto de la longitud de uno de sus lados por la longitud de la altura de ese lado, a cada uno de los triángulos generados por las iteraciones podemos realizarles el cálculo del área directamente usando la formula o relacionándola proporcionalmente con el área del triángulo inicial.

2.3.2.2. Dimensión 2: Perímetro infinito y Área cero

Argote (2004) reafirma lo planteado por Waclaw Sierpinski, que el modelo teórico de Triángulo de Sierpinski necesitaría un número infinito de iteraciones para construirse. De acuerdo a la cantidad de las iteraciones se dan, entonces el área total se va desvaneciendo hasta llegar a cero, al mismo tiempo el perímetro de los infinitos triángulos tenderá a infinito.

2.3.2.3. Dimensión 3: Comprensión de la característica de dimensión fractal

Es natural e intuitivo para la mayoría de las personas que las dimensiones de las figuras geométricas tengan dimensiones 0, 1,2 o 3. Pero ya empieza a ser poco intuitivo cuando la dimensión toma otros valores como la del triángulo de Sierpinski tiene dimensión aproximadamente igual a 1,584, que resulta de dividir ln 3/ ln 2.

Para demostrarlo plenamente se requieren las teorías de la medida y de la dimensión, lo cual no es pertinente para el público objetivo y por lo tanto se limita a la definición y su fórmula.

2.4. Formulación de hipótesis

2.4.1. Hipótesis general

El uso de la herramienta Geogebra influye significativamente en la comprensión de la construcción del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.

2.4.2. Hipótesis específicas

H1: El uso de la herramienta Geogebra influye significativamente en la comprensión de las características de auto similitud del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.

H2: El uso de la herramienta Geogebra influye significativamente en la comprensión de las características de perímetro infinito y área cero del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.

H3: El uso de la herramienta Geogebra influye significativamente en la comprensión de las características de dimensión fractal del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.

2.5. Operacionalización de variables e indicadores

Variables de la investigación del objetivo general

a) Variable independiente (X): Geogebra

b) Variable dependiente (Y): Comprensión características del triángulo de Sierpinski

2.5.1. Variable Independiente (X): Herramienta GeoGebra

Se justifican las dimensiones debido a las características particulares del triángulo de Sierpinski.Según se detalla en la Tabla 1.

Tabla 1. Dimensiones e indicadores de la variable independiente (X)

Variable independiente	Dimensiones	Indicadores	Sesiones
GeoGebra (X)	1. Construcción con vista gráfica (X_1)	1.1 Construcción con comando punto medio 1.2 Construcción con comando homotecias 1.3 Construcción con comando deslizador	Sesión 1 Sesión 2 Sesión 3 Sesión 4 Sesión 5 Sesión 6 Sesión 7 Sesión 8 Sesión 9
	2. Construcción con Vista Algebraica (X_2)	2.1 Objetos libres 2.2 Objetos dependientes 2.3 Objetos auxiliares	
	3. Construcción con la Hoja de cálculo (X_3)	3.1 Ingreso de datos manual 3.2 Arrastre para tabulación de datos 3.3 Vincular datos de la vista algebraica	

Fuente: Elaborada propia.

2.5.2. Variable dependiente (Y): Triángulo de Sierpinski

Según se detalla en la Tabla

Tabla 2. Dimensiones e indicadores de la variable dependiente (Y)

Variable dependiente	Dimensiones	Indicadores	Índices / Ítems
Triángulo de Sierpinski (Y)	1. Comprensión de la característica de la Autosimilitud (Y_1)	1.1 Clasificación de triángulos 1.2 Congruencia de triángulos 1.3 Semejanza de triángulos	**3 preguntas** **Correcta= 1** **Incorrecta= 0**
	2. Comprensión de la característica de área cero y perímetro infinito (Y_2)	2.1 Perímetro y área del triángulo 2.2 Perímetro infinito 2.3 Área cero	**6 preguntas** **Correcta= 1** **Incorrecta= 0**
	3. Comprensión de la característica de dimensión fractal (Y_3)	3.1 Dimensión topográfica 3.2 Dimensión fractal 3.3 Fórmula de la dimensión fractal	3 preguntas **Correcta= 1** **Incorrecta= 0**

Fuente: Elaboración propia.

2.6. Definición de términos básicos

Fractal: Para Mandelbrot (1977):

La palabra fractal, referida a conjuntos matemáticos, la utilizó en su libro para referirse a ciertos conjuntos con todas o algunas de las siguientes propiedades: Tienen detalles a todas las escalas, entendiendo por esto que mirados a cualquier nivel de escala (zoom) manifiestan detalles ya observados a nivel global. 1 Son autosemejantes, es decir, que están formados por partes que son semejantes al conjunto total. Tienen una descripción algorítmica simple, entendiendo por ello que su construcción se basa en un algoritmo sencillo. Es fácil observar que los cuatro conjuntos que aparecen en la figura anterior verifican las tres propiedades descritas. Entre las muchas actividades que se pueden plantear alrededor de los conjuntos fractales, aquí vamos a tratar las dos que consideramos más interesantes: construcción de fractales mediante algún software matemático-geométrico y una introducción a la medida y dimensión fractal.es un conjunto autosemejante y cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica. Es una definición que no es formal desde el punto de vista matemático y se debe aclarar que la palabra fractal no distingue, adrede, entre conjuntos matemáticos (la teoría) y objetos naturales (la realidad): se emplea en los casos en que su generalidad, y la ambigüedad deliberada que resulta de ello sean bien deseadas, bien aclaradas por el contexto, o no lleven inconvenientes asociados (p. 31-32).

Dimensión fractal: Según Sabogal & Arenas (2011), "es un número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural. La dimensión fractal no es necesariamente entera. Sentido específico" (p. 5).

Conjunto Fractal: Según Sabogal & Arenas (2011), "Conjunto cuya dimensión fractal es mayor o igual que su dimensión ordinaria (topológica)". (p. 6).

Objeto Fractal: Según Sabogal & Arenas (2011), “Objeto natural que resulta razonablemente útil representarlo matemáticamente por un conjunto fractal”. (p. 6).

Software educativo: Marqués (2011), “son programas para ordenador creados con la finalidad específica de ser utilizados como medio didáctico, es decir, para facilitar los procesos de enseñanza y de aprendizaje”.

Geometría Fractal: Vera (2002):

> Una teoría matemática moderna que se aparta radicalmente de la geometría euclidiana tradicional, describe objetos geométricos que son autosemejantes o simétricos en escala. Esto significa que, cuando se amplifican tales objetos, sus partes guardan una semejanza exacta con el todo, prolongándose la similitud con las partes de las partes y así hasta el infinito. Los fractales, que es el nombre que se les da a estos objetos, carecen de simetría traslatoria, esto es, carecen de la suavidad asociada con líneas, planos y esferas euclidianas. En cambio, mantienen en cualquier escala un contorno rugoso y mellado. La palabra fractal proviene del verbo latino frangere (romper) y el adjetivo correspondiente fractus (irregular y fragmentado) (p. 3).

Geometría euclidiana: Según Montenegro (2002), “subdivisión de la Geometría, la más básica de todas, dada así en memoria del gran sabio Griego Euclides, quién definió formalmente en su obra elementos” (p. 26).

Área: Montenegro (2002), “superficie ocupada por puntos continuos que se desplazan en dos direcciones. Si una recta la desplazamos de posición, su huella generará un área. Posee 2 dimensiones: el largo y el ancho” (p. 27).

Perímetro: Montenegro (2002), “suma de todos los lados que delinean el contorno de una figura cerrada” (p. 27).

Punto medio: Montenegro (2002), “punto de una recta que lo divide exactamente en dos partes iguales” (p. 27).

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1. Tipo y nivel de la investigación

La presente investigación es de tipo aplicada, con el objetivo de determinar el uso de la herramienta GeoGebra (variable independiente) y la comprensión de las características del triángulo de Sierpinski (variable dependiente).

Según Vara-Horna (2012), el interés de la investigación aplicada es práctica, refiriéndose a que los resultados que se obtengan pueden ser utilizados en un contexto específico para la solución de una problemática. En el caso de la presente investigación es viable implementar, en el contexto del instituto Pascual Bravo, se propone la enseñanza de la geometría fractal en el grado 8° con el uso de la herramienta Geogebra.

Según Bisquerra (2009), los métodos de investigación en educación y entre estos de la investigación aplicada, está orientada a tomar decisiones, como en el caso de la presente tesis, en aras de la resolución de problemas inmediatos como la enseñanza de la geometría fractal en el aula de clase del Pascual Bravo para obtener mejores resultados educativos tanto a nivel interno como externo.

3.2. Diseño de la investigación

Según Hernández (2008), los diseños experimentales se utilizan cuando el investigador pretende establecer el posible efecto de una causa que se manipula.

Según Vara-Horna (2012), los diseños generales y específicos de investigación según el nivel de desarrollo del tema estudiado, surge la investigación pre experimental dentro del diseño explicativo cuantitativo, el cual se ajusta a la presente investigación (p. 203).

El diseño de la investigación es pre experimental, se aplica un pre test y un post test con un solo grupo, el cual es útil para el primer acercamiento que se realiza en el problema de esta investigación.

De acuerdo al tipo de estudio, la hipótesis planteada, se analizó que la mejor manera de desarrollar esta investigación de acuerdo al contexto y antecedentes encontrados, se pretende encontrar una primera relación, por tanto es Pre-experimental.

En los diseños de investigación cuantitativa en educación bajo los modelos de Campbell y Stanley, se elige el diseño pre test y post test con un solo grupo, bajo la fórmula:

$G_{1:}$ o_1 x o_2

$G_{1:}$ grupo

$O_{1:}$ pretest

x: tratamiento

$O_{2:}$ postest

3.3. Población y muestra

3.3.1. Población

La población de los estudiantes objeto de estudio en total son 123 estudiantes del grado 8° del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo Medellín- Colombia. Se caracteriza por ser de grupos sociales de estratos 2, 3 y 4, con edades que oscilan entre 13 a 16 años.

Tabla 3. Distribución de la Población por grados

Institución/Sede	Grado	Número de estudiantes		Total de estudiantes
		Hombre	**Mujeres**	
Pascual Bravo	*Octavo uno*	*19*	*7*	*26*
	Octavo dos	*18*	*8*	*26*
	Octavo tres	*24*	*7*	*31*
	Octavo cuatro	*29*	*11*	*40*
	Total			*123*

Fuente: Elaboración propia.

3.3.2. Muestra

La muestra no probabilística, según Scharager y Armijo, (2001):

Este tipo de muestras son también llamadas muestras dirigidas o intencionales, la elección de los elementos no depende de la probabilidad sino de las condiciones que permiten hacer el muestreo (acceso o disponibilidad, conveniencia, etc.); son seleccionadas con mecanismos informales y no aseguran la total representación de la población. Esto implica que no es posible calcular con precisión el error estándar de estimación, es decir no podemos determinar el nivel de confianza con que hacemos la estimación. Lo anterior se explica porque no todos los sujetos tienen la misma probabilidad de ser seleccionados, por lo que es esperable la no representatividad de todos los miembros de la población (p. 3).

Para el caso de la presente investigación, se toma una muestra no probabilística de 40 estudiantes correspondientes al grado octavo del grupo cuatro, a criterio de las investigadoras, por el horario del grupo más adecuado para el uso de la sala de informática.

Tabla 4. Distribución de la muestra por género

		Número de estudiantes		
Institución/Sede	**Grado**	**Hombre**	**Mujeres**	**Total de estudiantes**
Pascual Bravo	*Octavo cuatro*	*29*	*11*	
	Total			*40*

Fuente: Elaboración propia.

3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

3.4.1. Descripción de Instrumentos:

Técnica: evaluación

La técnica elegida es una evaluación, según la guía publicada por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, los lineamientos para las aplicaciones muestral y censal, si se aplica una prueba tipo ICFES, se logra evaluar al estudiante en aquellos desempeños que pueden medirse a través de pruebas de papel y lápiz. Todas las preguntas utilizadas en la aplicación son de selección múltiple con única respuesta, en las cuales se presentan el enunciado y cuatro opciones de respuesta, denominadas A, B, C, D. Solo una de ellas es correcta y válida respecto a la situación planteada.

Instrumento: prueba

La construcción del instrumento es de autoría de las tesistas, siguiendo los lineamientos del modelo basado en evidencias. La prueba consta de 12 preguntas, 3 relacionadas con la primera dimensión, 6 con la segunda dimensión y 3 con la tercera dimensión de la variable dependiente. Esta se diseña según el documento guía de los lineamientos de las pruebas saber, desde 2007, el ICFES utiliza esta metodología para el desarrollo de especificaciones de las pruebas denominada Modelo Basado en Evidencias (MBE). El documento afirma que con este modelo se pueden construir instrumentos estandarizados de evaluación masiva, o a gran escala, con un alto grado de validez, garantizando la homogeneidad en los instrumentos desarrollados y, por tanto, la comparabilidad de los resultados en el tiempo. Según el mismo documento, el Modelo Basado en Evidencias es una familia de prácticas de diseño de pruebas que permite hacer explícito lo que se mide y apoyar las inferencias hechas con base en las evidencias derivadas de la evaluación. Con ello se busca asegurar la validez del examen, mediante la alineación de los procesos evaluados y los resultados de las pruebas con sus objetivos y propósitos. Consiste en un conjunto de procesos o pasos que parten de la identificación de las dimensiones de evaluación y la descripción de las categorías que las conforman.

Para recopilar datos de la variable dependiente se utilizó una prueba de pre test, que consistió en 12 preguntas antes de aplicar GeoGebra y post test después de aplicar Geogebra.

Tabla 5. Respuestas correctas y asignación de puntajes a la prueba

		Opciones		
Opciones de respuesta	**Respuesta correcta**	**Valor respuesta Correcta**	**Valor respuesta Incorrecta**	***Dimensión***
A,B,C,D	*1.B*	*1*	*0*	*1*
	2.B	*1*	*0*	*1*
	3.A	*1*	*0*	*1*
	4. A	*1*	*0*	*2*
	5.B	*1*	*0*	*2*
	6.C	*1*	*0*	*2*
	7.A	*1*	*0*	*2*
	8.D	*1*	*0*	*2*
	9.B	*1*	*0*	*2*
	10.C	*1*	*0*	*3*
	11. A	*1*	*0*	*3*
	12.C	*1*	*0*	*3*
	Total	*12*	*0*	*12*

Fuente: Elaboración propia.

Procedimiento de recolección de datos

Aplicación de la prueba de entrada – pre test

El propósito de este test fue la de determinar en qué nivel los estudiantes del grado 8° comprenden las características del triángulo de Sierpinski sin haber utilizado Geogebra para la construcción del mismo. El test se divide en 12 preguntas de las cuales, 3 están orientadas a la característica de auto similitud, 6 a las características de perímetro infinito y área cero y 3 para la dimensión fractal.

Aplicación del procedimiento: uso de la herramienta GeoGebra

Se aplica el tratamiento a la variable herramienta GeoGebra, para conocer si influye en la comprensión de la construcción de triángulo Sierpinski en estudiantes de 8º grado, para lo cual se diseñaron sesiones de acuerdo a la contenidos considerado. La intervención se realizó en los siguientes momentos:

Tabla 6. Sesiones realizadas para el tratamiento a 8-4

Geogebra	**Sesión**	**fecha**	**tiempo**	***Dimensión***
	1	Junio 2016	3 horas	Construcción con comando punto medio
	2	junio 2016	3 horas	Construcción con comando homotecias
	3	julio 2016	3 horas	Construcción con comando deslizador(encadena, secuencia, elementos)
	4	julio 2016	3 horas	Objetos Libres ampliar reducir Deslizador
	5	Agosto 2016	3 horas	Objetos Dependientes
	6	Agosto 2016	3 horas	Objetos Auxiliares
	7	Septiembre 2016	3 horas	Ingreso de datos manual
	8	Septiembre 2016	3 horas	arrastre para tabulación de datos
	9	Noviembre 2016	3 horas	vincular datos de la vista algebraica
	Total		27 horas	Construcción con comando punto medio

Fuente: Elaboración propia.

3.4.1. Descripción de los Instrumentos

- Prueba antes de GeoGebra: Previo al uso de la herramienta Geogebra Se realizan 12 preguntas tipo ICFES elaboradas por las tesistas bajo el modelo basado en evidencias, partiendo de un estándar correspondiente al grado 8°. Son 3 preguntas que identifican la comprensión del estudiante de la característica auto similitud del triángulo de Sierpinski, 6 sobre el área y el perímetro del triángulo y 3 sobre la dimensión fractal.

- Prueba después de Geogebra: Posterior al uso de la herramienta Geogebra Se realizan nuevamente las 12 preguntas tipo ICFES elaboradas por las tesistas bajo el modelo basado en evidencias, partiendo de un estándar correspondiente al grado 8°. Son 3 preguntas que identifican la comprensión del estudiante de la característica auto similitud del triángulo de Sierpinski, 6 sobre el área y el perímetro del triángulo y 3 sobre la dimensión fractal.

3.4.2. Validación de instrumentos

El instrumento utilizado para la investigación, fue construido según el diseño de especificaciones basado en el modelo de evidencias propuesto por el ministerio de educación nacional de Colombia, partiendo de los estándares básicos de competencias para la educación básica del ciclo 8°, definiendo las competencias para cada pregunta, construyendo las afirmaciones, evidencias y tareas correspondientes a cada una de las 12 preguntas elaboradas.

3.4.3. Confiabilidad del instrumento

Corral (2009), afirma que el Método de Kuder-Richarson 20 permite obtener la confiabilidad a partir de los datos obtenidos en una sola aplicación del test. Siendo un Coeficiente de consistencia interna, se usa para pruebas de ítems dicotómicos y cuando existen alternativas dicotómicas con respuestas correctas e incorrectas, lo cual es caso de la presente investigación

Tabla 7. Interpretación de la magnitud del coeficiente de confiabilidad

Interpretación de la magnitud del Coeficiente de Confiabilidad	
Rangos	*MAGNITUD*
De 0,81 a 1,00	*Muy alta*
De 0,61 a 0,80	*Alta*
De o,41 a 0,60	*Moderada*
De 0,21 a 0,40	*Baja*
De 0,01 a 0,20	*Muy baja*

Fuente: Ruiz Bolívar, 2002, citado en Corral, 2009, p. 17.

Según Sierra Bravo (2001), “el coeficiente de confiabilidad es un coeficiente de correlación, teóricamente significa la correlación del test consigo mismo. Sus valores oscilan entre 0 y 1” (p. 16).

Se halla la confiabilidad de la prueba según la tabla de Ruiz Bolívar (2002) y Pallella y Martins, 2003, citado en Corral (2009), se halla la confiabilidad con el KR-20. La confiabilidad del instrumento (prueba), arrojó el valor del 0,68401464, valor alto (confiable), donde 1 es la respuesta correcta y 0 es incorrecta.

KR(20)= 0,68401464

La siguiente tabla muestra la confiabilidad por dimensiones:

Tabla 8. Prueba k20 por dimensiones

Prueba de confiabilidad	**Dimensión de la variable dependiente**	**Descripción**	**Resultado**	
K-20	*1*	*Auto similitud*	KR(2)= *Alto*	0,64649054
	2	*Área cero y perímetro infinito*	KR(20)= *Alto*	(0,61 6
	3	*Dimensión fractal*	KR(20)= *Moderado*	0,51062332

Fuente: Elaboración propia.

3.5. Técnicas de procesamiento y análisis de datos

Interpretación: se realizó la lectura y análisis de los resultados obtenidos en los instrumentos de recolección de la variable independiente y dependiente.

Para la presente investigación pre-experimental, Una vez obtenidos los datos, se procesaron los mismos usando el estadístico Wilcoxon, por ser una prueba no paramétrica y que puede comparar el rango medio de las dos muestras relacionadas (pre y post) y se determinó que si existen diferencias entre ellas. Ver resultados en el anexo 8.

CAPÍTULO 4. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

4.1. Procesamiento de datos: resultados

Se calculó el valor de W y el valor de Z. El tamaño de N fue más de 20, ´por lo tanto el estadístico de Wilcoxon W forma una distribución normal. Por lo tanto se puede evaluar la hipótesis de la presente investigación. Se descartaron los estudiantes que tuvieron iguales condiciones antes y después del tratamiento con Geogebra.

Tabla 9. Prueba de Wilcoxon

Detalles del resultado		**Resultado 1 –**	**Resultado 2 –**
Valor de W	*19,5*	El valor Z es -3,4738.	Valor-W El valor W es 19,5.
	-6,32	El valor p es 0,00052	
Diferencia media	19,5	El resultado es significativo a $p \leq 0,05$.	
Suma de la pos. Rangos:	233.5		
	-3,4738		
	126,5		
	30,8		
Suma de neg. Filas	22		
Valor Z:			
Media (W):			
Desviación estándar (W):			
Tamaño de la Muestra (N):			

Fuente: Social Sciencie Statistics. (s.f.).

El valor crítico de W para N = 22 a p≤ 0,05 es 65. Por lo tanto, el resultado es significativo en p≤0,05.

Se realizó el pre y post test con una diferencia que puede observarse en el gráfico 1, donde el eje horizontal corresponde a cada uno de los 40 estudiantes evaluados y el eje vertical corresponde al puntaje de la prueba con un mínimo de 0 y un máximo de 12. En el gráfico la línea azul corresponde a los resultados del pre test y la línea naranja a los resultados del post test. Se evidencia un aumento significativo en el mejoramiento de los resultados obtenidos por los estudiantes después del tratamiento con Geogebra. Solo el estudiante N° 39, obtuvo resultados adversos y observando su prueba de manera individual, se evidenció la dificultad en la comprensión de la dimensión fractal.

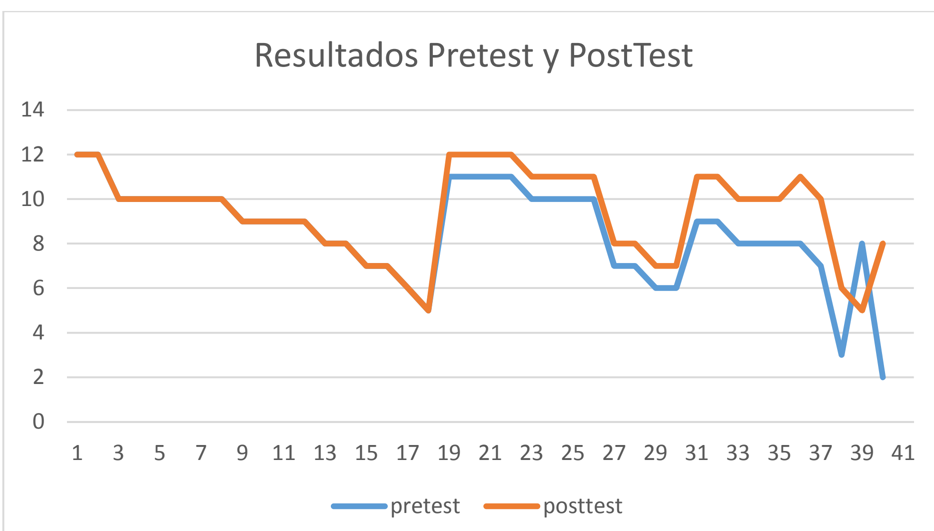


Gráfico 1. Resultados Pretest y posttest

Fuente: Elaboración propia.

En la dimensión auto similitud de la variable dependiente, se calculó el valor de W y el valor de Z

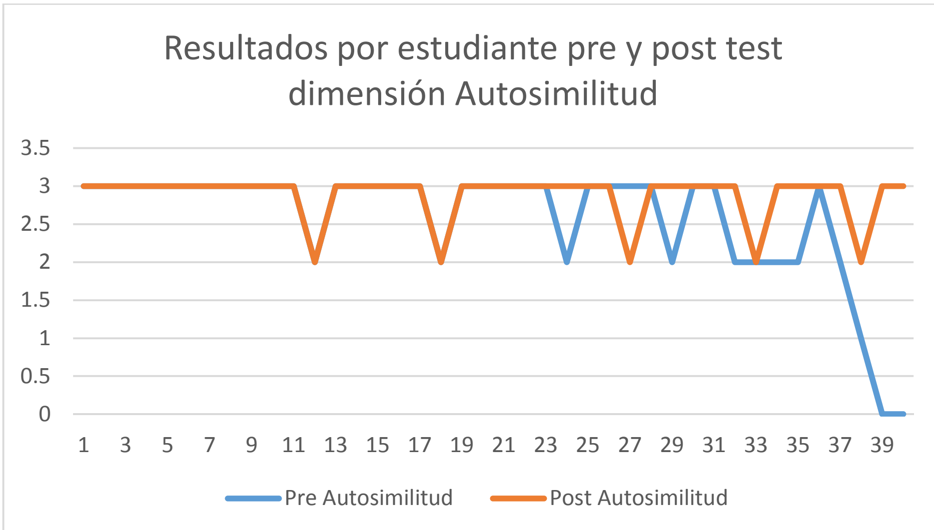


Gráfico 2. Resultados Pretest y posttest autosimilitud

Fuente: Elaboración propia.

Se calculó el valor de W y el valor de Z. Se descartaron los estudiantes que tuvieron iguales condiciones antes y después del tratamiento con Geogebra. En el gráfico N° 2 se identifica el eje horizontal como la identificación de cada uno de los estudiantes evaluados y el eje vertical como el número de preguntas acertadas en la dimensión de Autosimilitud, donde la línea azul corresponde al pre test y la naranja al post test, siendo una de las dimensiones con mayor fortaleza antes del tratamiento con GeoGebra, se evidencia un aumento significativo en los estudiantes que presentaban mayores dificultades en la comprensión de este concepto.

Tabla 10. Prueba de Wilcoxon dimensión autosimilitud

Detalles del resultado		Resultado 1 –***Valor Z***	Resultado 2 – Valor W
Valor de W	4,5	El valor Z es -3,4738.	El valor crítico de W para N = 10 a p≤ 0.05 es 8
	-1,7	El valor p es 0,01928	
Diferencia media	4.5	El resultado es significativo a p≤ 0,05.	
Suma de la pos. Rangos:	50.5		
	-2.3444		
	27,5		
	27,5		
Suma de neg. Filas	*10*		
Valor Z:			
Media (W):			
Desviación estándar (W):			
Tamaño de la Muestra (N):			

Fuente: Social Sciencie Statistics. (s.f.).

En la dimensión área cero y perímetro infinito

Se calculó el valor de W y el valor de Z. Se descartaron los estudiantes que tuvieron iguales condiciones antes y después del tratamiento con Geogebra.

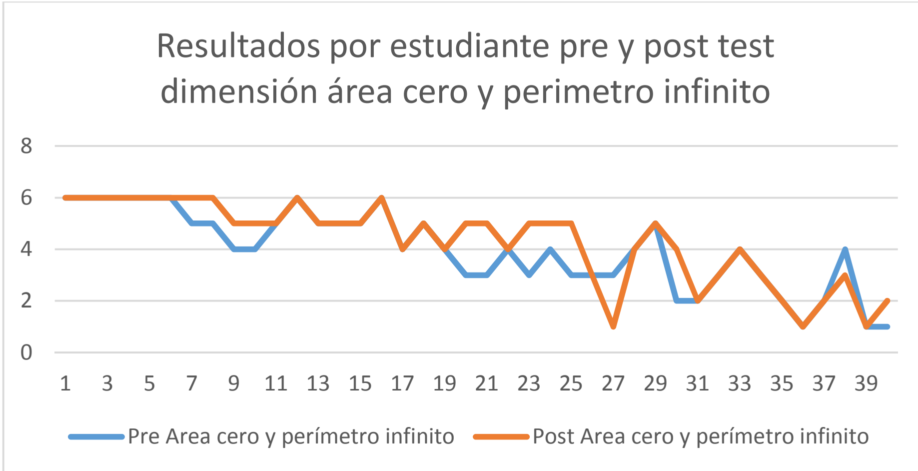


Gráfico 3. Resultados Pretest y posttest Dimensión área cero y perímetro infinito

Fuente: Elaboración propia.

En el gráfico N° 3 se identifica el eje horizontal como la identificación de cada uno de los estudiantes evaluados y el eje vertical como el número de preguntas acertadas en la dimensión de Área cero y perímetro infinito, donde la línea azul corresponde al pre test y la naranja al post test, una de las dimensiones con mayor complejidad para la comprensión y que involucró el tratamiento de GeoGebra usando la vista de la hoja de cálculo y la vista gráfica, muestra un aumento significativo en los estudiantes que presentaban mayores dificultades en la comprensión de estos conceptos. Los estudiantes N° 27 y 38, presentaron dificultades en la comprensión del concepto de área cero, se evidenció en la construcción del triángulo en las sesiones de trabajo al momento de rellenar con color el área que correspondería a una extracción del área total.

Tabla 11. Prueba de Wilcoxon Dimensión Área cero y perímetro infinito

Detalles del resultado		**Resultado 1 –*Valor Z***	**Resultado 2 – Valor W**
Valor de W	14,5	El valor Z es -2.1665	El valor W es 14,5
	-6,23	El valor p es 0,03	
	14,5	El resultado es significativo a p≤ 0,05.	El valor crítico de W para N = 13 en p≤ 0.05 es 17
Diferencia media	76,5		
Suma de la pos. Rangos:	-2.1665		
	45,5		
Suma de neg. Filas	14,31		
	13		
Valor Z:			
Media (W):			
Desviación estándar (W):			
Tamaño de la Muestra (N):			

Fuente: Social Sciencie Statistics. (s.f.).

El valor W es 14,5. El valor crítico de W para N = 13 en p≤ 0.05 es 17. Por lo tanto, el resultado es significativo en p≤ 0.05.

En la dimensión de la dimensión fractal

Hemos calculado tanto un valor W como un valor Z. Si el tamaño de N es al menos 20 - vea el cuadro Detalles de Resultados - entonces la distribución del estadístico Wilcoxon W tiende a formar una distribución normal. Esto significa que puede usar el valor Z para evaluar su hipótesis. Si, por otro lado, el tamaño de N es bajo, y particularmente si es inferior a 10, debe usar el valor W para evaluar su hipótesis.

Tabla 12. Prueba de Wilcoxon dimensión fractal

Detalles del resultado		**Resultado 1 –*Valor Z***	**Resultado 2 – Valor W**
Valor de W	0	Valor Z El valor Z es -2.5205. Sin embargo, el tamaño de N (8) no es lo suficientemente grande para la distribución de la Wilcoxon W estadística para formar una distribución normal. Por lo tanto, no es posible calcular un valor p exacto	0 Valor-W El valor W es 0. El valor crítico de W para N = 8 en p≤ 0.05 es 3. Por lo tanto, el resultado es significativo en p≤ 0.05.

Fuente: Social Sciencie Statistics. (s.f.).

Detalles del resultado Valor de W: 0 Diferencia media: -5,12 Suma de la pos. Filas: 0 Suma de neg. Filas: 36 Valor Z: -2.5205 (Nb N demasiado pequeño) Tamaño de muestra (N): 8

Resultado 1 - Valor Z El valor Z es -2.5205. Sin embargo, el tamaño de N (8) no es lo suficientemente grande para la distribución de la Wilcoxon W estadística para formar una distribución normal. Por lo tanto, no es posible calcular un valor p exacto. Resultado 2 - Valor-W El valor W es 0. El valor crítico de W para N = 8 en p≤ 0.05 es 3. Por lo tanto, el resultado es significativo en p≤ 0.05.

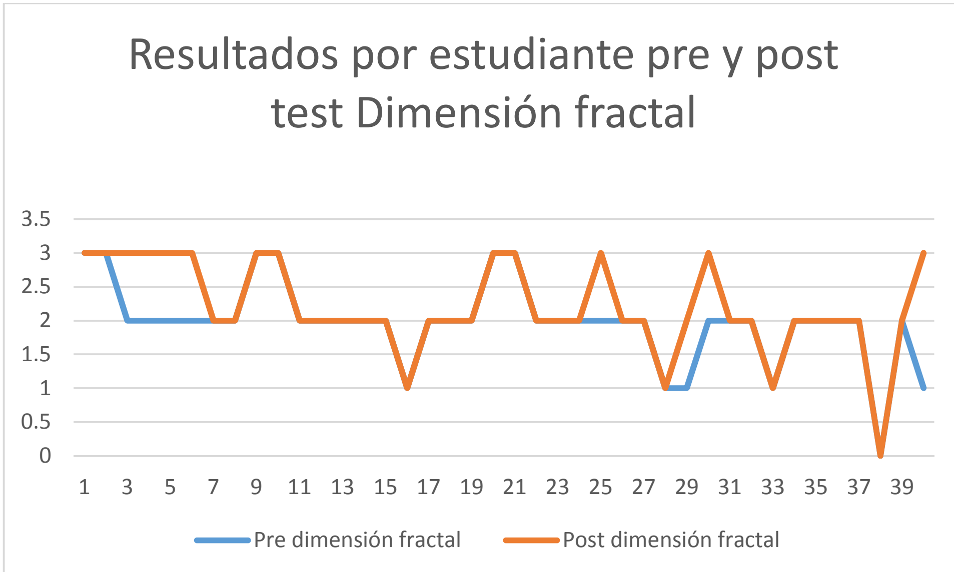


Gráfico 4. Resultados Pretest y posttest Dimensión fractal

Fuente: Elaboración propia.

En el gráfico N° 4 se identifica el eje horizontal como la identificación de cada uno de los estudiantes evaluados y el eje vertical como el número de preguntas acertadas en la dimensión del concepto de la dimensión fractal, donde la línea azul corresponde al pre test y la naranja al post test, siendo una de las dimensiones con menor fortaleza antes del tratamiento con GeoGebra, por ser un concepto que no es evidente a simple vista y cuya fórmula abstracta no es comprendida por la mayoría de los estudiantes evaluados, y aunque se evidencia en el post test un aumento del número de preguntas acertadas en algunos de los estudiantes, no son suficientes para concluir.

Para la variable independiente

En la dimensión Vista Gráfica

Durante las sesiones de clase realizadas, el 82,5 % de los estudiantes evaluados, utilizaron el comando de Geogebra, punto medio, seguido del comando homotecias con un 12,5% y solo el 5% utilizó el comando deslizador para construir el triángulo de Sierpinski. Se evidencia la influencia de Geogebra en la comprensión de la comprensión de la característica autosimilitud del triángulo de Sierpinski, según los resultados arrojados en el post test.

En la dimensión Vista Algebraica

En las sesiones de clase guiadas, los estudiantes lograron utilizar los comandos objetos libres, dependientes y auxiliares, con la finalidad de que la influencia de GeoGebra se reflejara al momento de vincular los objetos dependientes, como segmentos, triángulos, puntos, con las formulas del área, del perímetro y de la dimensión fractal principalmente. Se evidenció su influencia alta en la comprensión de la característica del área cero y perímetro infinito, según los resultados presentados en esta investigación, sin embargo la comprensión de la dimensión fractal no tuvo una influencia significativa al momento del post test.

En la dimensión Hoja de cálculo

En las sesiones de clase guiadas, los estudiantes lograron utilizar los el ingreso de datos manual, el arrastre para la tabulación de datos y vincular datos de la vista algebraica, con la finalidad de que la influencia de GeoGebra se reflejara en los cálculos del área, del perímetro y de la dimensión fractal principalmente. Se evidenció su influencia alta en la comprensión de la característica del área cero y perímetro infinito, según los resultados presentados en esta investigación, sin embargo la comprensión de la dimensión fractal no tuvo una influencia significativa al momento del post test.

4.2. Prueba de hipótesis

De acuerdo a los resultados arrojados por el estadístico Wilcoxon con un W=19,5 se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis que afirma que el uso de la herramienta Geogebra influye significativamente en la comprensión de las características del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.

4.3. Discusión de resultados

Los resultados de la presente investigación, prueban que el uso del software Geogebra influye de manera positiva en La comprensión de las características del triángulo de Sierpinski, construido por los estudiantes en la vista gráfica, vista algebraica y vista hoja de cálculo permitiendo desarrollar las competencias referidas al pensamiento geométrico, evaluadas en el PRE y POST test . El resultado con un W que arrojó el valor alto de 0,68401464, apoya lo hallado por García, María del Mar en la investigación doctoral: *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula, la* influencia de Geogebra en el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes donde se destacan la constructividad y la interactividad de Geogebra mejora el componente cognitivo, gracias a la posibilidad de construir objetos con el software y como el efecto que Geogebra potencia en mayor grado a determinadas competencias, encontrando ciertos atributos y ventajas de Geogebra asociados a tal mejora. (García, 2011, p. 491)

Se obtuvo como resultado que el software Geogebra influye positivamente en la comprensión de la característica del triángulo de Sierpinski alusiva al perímetro infinito y área cero, construido desde la vista gráfica que permitió al estudiante generar iteraciones numerosas, intuitivamente infinitas y sustentadas matemáticamente en la vista hoja de cálculo por medio de operaciones arrastradas en las celdas que mostraban el aumento de dicho perímetro y la disminución de dicha área, permitiendo al estudiante deducir el concepto de infinito, de tal forma que el infinito como sostiene Vega, Juan Carlos en la investigación *“Concepciones*

En Torno Al Infinito Actual: Análisis Mediado Por El Software Cabri Geometre", al reseñar a algunos autores como De Lorenzo y Le Goff que consideran el infinito actual como un objeto matemático originado en un contexto geométrico puesto que es un infinito ilimitado y métrico, que permite la cuantificación y la resolución de problemas del mundo real y en el cual se involucran elementos de las matemáticas tales como: número infinito, punto infinito, construcciones infinitas en espacios finitos y series con infinitos elementos Esta concepción del infinito surge al ser considerado como una unidad, dicho en otras palabras, como "un objeto unitario" que es infinitamente grande o numeroso (De Lorenzo, 2001: p 3)

Teniendo en cuenta las semejanzas entre los software Cabri y Geogebra, se encontraron resultados en esta investigación, donde el uso del software Geogebra influye positivamente en la comprensión de las características de un fractal como el triángulo de Sierpinski similares a los resultados obtenidos por Vega (2014), en su investigación titulada *"Concepciones En Torno Al Infinito Actual: Análisis Mediado Por El Software Cabri Geometre*", donde los estudiantes desarrollaron el pensamiento matemático más allá de la resolución de algoritmos y hallazgo de respuestas numéricas, también similar a lo que buscó Echeverry (2013), en su investigación titulada *"Influencia del uso de Cabri Geometry Ii® En El Proceso De Enseñanza-Aprendizaje De Conceptos Básicos De Geometría"* , donde determinó la influencia de la implementación de un software en el aprendizaje de conceptos básicos de geometría, y concluyó que fue positivo.

En la presente investigación, el uso de GeoGebra y su influencia en la comprensión de la característica de la dimensión Fractal en la construcción del triángulo de Sierpinski, no se pudo concluir positivamente y podemos apoyarnos en los antecedentes de la investigación realizada por Segura (2013) donde se refiere a las limitaciones del software creado en dos dimensiones para representar otras dimensiones topológicas.

Es así como según Echeverry (2013), en la prueba diagnóstica para el grupo experimental obtuvo un puntaje medio de 12,75 sobre un total posible de 37 puntos, respondiendo de forma correcta, en promedio, un 34,5% de la prueba. Para el grupo control, los resultados de este test fueron inferiores, con un valor medio de 10,63 y llegando a un 28,7% de rendimiento. A la luz de estos resultados es posible concluir que aunque en grados inferiores los estudiantes ya se habían tratado las temáticas relacionadas con el pre-test, el conocimiento y manejo de conceptos no es adecuado, lo cual puede compararse con los resultados hallados en la dimensión Fractal de esta tesis, dónde los estudiantes del grado 8° no alcanzaron a comprender el concepto de dimensión fractal, un concepto que requiere un alto nivel de abstracción, donde las dimensiones fractales no tienen representación en ningún software actual, como afirma Segura (2013), también hace referencia a que el término “Pantalla 3D”, sigue siendo únicamente un efecto óptico obtenido a partir de imágenes bidimensionales y en el caso del software para fractales sigue siendo en 2D o 3D.

Se obtuvo como resultado en la presente investigación, que el software Geogebra influyó positivamente en la comprensión de la característica de autosimilitud del triángulo de Sierpinski, construido por los estudiantes en la vista gráfica y vinculando el objeto con la vista algebraica y la vista hoja de cálculo, permitiendo al estudiante verificar la congruencia o semejanza de los triángulos generados en cada iteración, lo cual coincide con Rivera Henao y López Varona.

(2012), En el artículo “Evidencia de propiedades fractales en la sucesión de Fibonacci usando wavelets” de Scientia et Technica Año XVII, No 52, en la cual se da la importancia a la autosemejanza como característica de los fractales y como el uso de las herramientas tecnológicas son fundamentales para la construcción esta característica que se repite a diferentes escalas, mostrando así la existencia de autosemejanza o autosimilaridad de forma gráfica.

Es así como en este artículo publicado por Rivera Henao y López Varona (2012), se evidencia la propiedad fractal de autosemejanza para la sucesión de Fibonacci usando wavelets concluyendo que para una función auto semejante, la transformación en wavelet presentará un comportamiento de auto semejanza. El software Geogebra no es mencionado en el artículo, pero se destaca el uso de las herramientas tecnológicas para la construcción de una característica de los fractales como es la autosimilitud, lo cual coincide con los resultados de esta tesis donde los estudiantes de 8° del Instituto Industrial Pascual Bravo, construyendo el triángulo de Sierpinski descubren visualmente el patrón de comportamiento que se repite a diferentes escalas, mostrando en esta dimensión con la autosimilitud y que arrojó resultados significativos a $p \leq 0,05$, se sustenta este resultado con lo sostenido en el marco teórico, donde unas 5 iteraciones pueden mostrar una figura límite aceptable y que con la opción de acercar y alejar de Geogebra fue posible, hacerlo más intuitivo para los estudiantes, Los estudiantes pueden apreciar usando estos comandos como el conjunto de los 4 triángulos se repite a diferentes escalas y que al manipularlo con el mouse puede generar diversas escalas sin dañar las relaciones matemáticas que se presentan entre ellos.

En el test se aplicó y justifico los criterios de congruencia y semejanza entre triángulos. Para responder correctamente, el estudiante debía saber que la figura representa la extracción de un triángulo y lo clasifica como congruente a otro. A partir de la definición de triángulo congruente se identifican las extracciones de cada iteración. En este caso elegir la respuesta correcta implicaba que el estudiante diferenciara las características de los tipos de triángulos, incluyendo tamaño y forma, lo cual es importante al momento de las extracciones en las diferentes iteraciones para que llegara a clasificar los triángulos extraídos según la misma iteración del triángulo de Sierpinski.

Identificar triángulos congruentes es pre saber de años anteriores pero se especializa en el grado 8°, por lo que el 92,5 % de los estudiantes respondieron correctamente en el pre test y en estos resultados del Pre test se pudo evidenciar que los estudiantes del grado 8° comprenden las características de un triángulo congruente, que es definitivo para diferenciar las extracciones en cada iteración de la construcción del triángulo de Sierpinski, luego en el post test el porcentaje de los estudiantes que respondieron correctamente subió al 100% de respuestas correctas.

El tratamiento realizado a los estudiantes para identificar las congruencias entre triángulos utilizando GeoGebra, consistió en la construcción del comando punto medio, usada por el 70 % de los estudiantes, como referencia en la sesión de clase correspondiente a esta dimensión de la variable independiente. El restante

30% utilizó el comando homotecias y el comando deslizador no fue utilizado por ninguno de los estudiantes, esto debido a la necesidad de utilizar JAVA.

El porcentaje de estudiantes que mejoraron en su respuesta con respecto al test inicial, vincularon datos en la vista algebraica y en la hoja de cálculo, y en los resultados obtenidos se halló que los estudiantes aumentaron la comprensión de las características del triángulo de Sierpinski con un nivel de significancia de 0,05% con un w=19,5, después del tratamiento con el software de Geogebra, y se concluye de manera similar a los hallazgos de la investigación, titulada *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula,* donde se estudia el efecto que Geogebra ha potenciado en mayor grado a determinadas actitudes y competencias, encontrando ciertos atributos y ventajas de Geogebra asociados a tal mejora, y tal como afirma Losada (2007), Geogebra es un software de matemáticas dinámicas, fácil de usar para todos los niveles educativos, y en que en la presente investigación se trabajó geometría, álgebra, la hoja de cálculo, gráficos para el grado 8° evidenciando mejoras en la comprensión de conceptos geométricos, además de que favoreció ser una herramienta gratuita y de código abierto para dar continuidad y permanente uso en el área de matemáticas en el Instituto Pascual Bravo.

Para la presente investigación es relevante destacar a Mandelbrot (1997), que en su libro *"La Geometría Fractal De La Naturaleza"* lo dejo abierto como documento de estudio y continua siéndolo para investigaciones similares a la presente.

En la presente investigación los resultados obtenidos demostraron que el tratamiento con Geogebra, utilizando tanto representaciones gráficas del triángulo de Sierpinski cómo el uso de la hoja de cálculo aumentó la comprensión de características del fractal en los estudiantes de 8° del Instituto Técnico Pascual Bravo, como afirma Losada (2007), “Geogebra combina las representaciones gráficas y simbólicas ofreciendo ambas al mismo tiempo, lo que genera un gran valor añadido” (p. 223-239) y ese valor añadido constituye el análisis numérico y gráfico de manera dinámica.

En el marco teórico se había advertido del suavizado de las líneas (antialiasing) de Geogebra, se puede exportar la zona gráfica como una imagen vectorial (eps). Esto fue importante en el uso del zoom cuando los estudiantes visualizaron la autosimilitud del triángulo de Sierpinski y se evidenció en las respuestas del post test, donde se evaluaba, según la estructura de la prueba del modelo basado en evidencias, el uso de representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas. En este caso es representada la respuesta correcta en un triángulo equilátero que esta girado de forma que uno de sus ángulos sean ubicados atípicamente con la intencionalidad que la visión humana pueda ser superada por las características geométricas de un triángulo equilátero, figura que es la inicial en la construcción del triángulo de Sierpinski. Identificar estas características de un triángulo equilátero es supuesto de un pre saber de años anteriores, por lo que el 90 % de los estudiantes respondieron correctamente en el pre test y en estos resultados del Pre test se pudo evidenciar que los estudiantes del grado 8° comprenden la definición de un triángulo equilátero, del cual parte la construcción del triángulo de Sierpinski, luego en el post test el porcentaje de los estudiantes que respondieron correctamente subió a 97,5 % de respuestas correctas y ese tratamiento realizado a los estudiantes después de la construcción de un triángulo equilátero utilizando GeoGebra, consistió en la utilización del comando polígono regular (3) como alternativa común, donde se parte de dos puntos extremos de un lado y posteriormente se le asigna un número de vértices. Sin embargo los estudiantes después de las sesiones de trabajo con GeoGebra, idearon diferentes formas de construcción del triángulo equilátero como es el uso del comando segmentos que consiste en dos puntos extremos (ya creados o no) y el comando ángulo dada su amplitud, que en este caso es 60°. El estudiante que no construyó correctamente el triángulo utilizó la construcción manual usando segmentos pero sin tener en cuenta los ángulos del mismo, esto se ve reflejado en la respuesta dada en el post test donde elige la respuesta A como la correcta. El porcentaje de estudiantes que mejoraron en su respuesta con respecto al test inicial, usaron la vinculación de la vista algebraica con la construcción del triángulo, además utilizaron los objetos libres para la construcción del mismo. En esta respuesta es evidente la conveniencia del uso de Geogebra, ya que puntualmente los 3 estudiantes que tuvieron dificultades antes del uso de Geogebra pudieron visualizar en el programa la congruencia de los triángulos y que al rotar las figuras no cambiaban sus valores de área y perímetro.

Analizamos la hipótesis general y específica a la luz de los resultados obtenidos.

De acuerdo a los resultados obtenidos rechazamos la hipótesis nula y se confirma la hipótesis alterna: El uso de la herramienta Geogebra influye de manera significativa en la comprensión de la construcción del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016, se consideró el valor menor, ósea 19,5 donde el punto crítico para una significación de 0,05 es 65 para un n de 40 como el valor es 19,5 menor que el de la tabla, se rechaza la hipótesis nula. Se concluye que si hay diferencias significativas estadísticamente entre las 2 muestras.

Para las hipótesis específicas de acuerdo a los resultados anteriores se concluye que:

H1: El uso de la herramienta Geogebra influye significativamente en la comprensión de las características de auto similitud del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.

H2: El uso de la herramienta Geogebra influye de manera significativa en la comprensión de las características de perímetro infinito y área cero del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.

Las preguntas del test evidenciaron que los estudiantes que tenían las mayores dificultades en el pre test, lograron comprender como hallar el perímetro y área de 1 solo triángulo para posteriormente realizar el cálculo del área resultante y perímetro resultante de cada iteración, usando en Geogebra, la vista hoja de cálculo vinculada a la vista gráfica. Además El estudiante comprendió el concepto de área y perímetro de la geometría euclidiana y como deducirlo de un triángulo equilátero para posteriormente interpretarlo en el triángulo de Sierpinski a medida que se realizaban las iteraciones.

H3: Con respecto a la Hipótesis de la dimensión fractal debe decirse el uso de la herramienta Geogebra no influyó significativamente en la comprensión de las características de dimensión fractal del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016. Esto puede explicarse debido a la misma limitación física del ojo humano y del software como tal, ya que es complicado para el estudiante comprender que existan dimensiones fractales y su interpretación visual se complica y Segura (2013) se refiere a la percepción tridimensional del sistema visual humano, y como la percepción de profundidad es la habilidad visual de percibir el mundo en tres dimensiones, y la distancia respecto a objetos, lo cual limita la habilidad del ojo humano a dimensiones no enteras. También se habla de nuevos formatos de contenido tridimensional, que a pesar de obtener una calidad de imagen y un efecto de profundidad mejorados, no pueden ser visualizados en una pantalla bidimensional, y requieren nuevos dispositivos capaces de emitir dichos formatos y hacérselos recibir al observador. Segura (2013), también hace referencia a que el término “Pantalla 3D”, sigue siendo únicamente un efecto óptico obtenido a partir de imágenes bidimensionales y en el caso del software para fractales sigue siendo en 2D o 3D.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones:

De acuerdo a los resultados arrojados por el estadístico Wilcoxon con un W=19,5 se puede concluir que uso de la herramienta Geogebra influye significativamente en la comprensión de las características del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.

De acuerdo a los resultados arrojados por el estadístico Wilcoxon con un W=4,5 El uso de la herramienta Geogebra influye significativamente en la comprensión de las características de auto similitud del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.

De acuerdo a los resultados arrojados por el estadístico Wilcoxon con un W=14,5 El uso de la herramienta Geogebra influye significativamente en la comprensión de las características de perímetro infinito y área cero del triángulo de

Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.

El uso de la herramienta Geogebra no influye significativamente en la comprensión de las características de dimensión fractal del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.

El uso de la herramienta Geogebra, en su dimensión de la Vista Gráfica, fue la más utilizada por los estudiantes, con un porcentaje del 82,5 %, seguida por el comando homotecias con el 12,5% y solo un 5% con el comando deslizador.

El uso de la herramienta Geogebra, en su dimensión de la Vista Algebraica fue utilizada por los estudiantes de manera guiada en las sesiones, utilizando objetos libres, dependientes y auxiliares que facilitaron la comprensión de características del triángulo de Sierpinski como son el área cero y perímetro infinito.

El uso de la herramienta Geogebra, en su dimensión de la Hoja de Cálculo fue utilizada por los estudiantes de manera guiada en las sesiones, utilizando el ingreso de datos manual, el arrastre para tabulación de datos y la vinculación de datos de la vista gráfica, que acercaron al estudiante a la comprensión de características del triángulo de Sierpinski como son el área cero y perímetro infinito .

5.2. Recomendaciones

El mayor uso de Geogebra en la enseñanza de Geometría ayuda a la comprensión de las características del triángulo de Sierpinski y su construcción a través del software.

Las dimensiones de la variable independiente Geogebra, estudiadas en la presente investigación: Vista Gráfica, Vista Algebraica y Hoja de cálculo permiten a los docentes ampliar el conocimiento de los estudiantes, no solo a nivel de Geometría sino de algebra.

Se recomienda el uso de la vista gráfica de Geogebra para la visualización de la construcción del triángulo y la comprensión de la característica de autosimilitud, especialmente la construcción con el comando punto medio.

Se recomienda el uso de la vista algebraica y hoja de cálculo de Geogebra para la comprensión de las características de perímetro infinito, área cero y dimensión fractal, teniendo en cuenta el ingreso de datos manual para mayor asimilación de las formulas.

Se recomienda que los maestros hagan uso de la herramienta GeoGebra para que los estudiantes logren comprender características como la auto similitud, concepto que puede profundizar la enseñanza de la geometría.

Se recomienda que los maestros hagan uso de la herramienta GeoGebra para que los estudiantes logren comprender características el perímetro infinito y el área cero, conceptos que pueden profundizar la enseñanza de la geometría fractal.

La presente investigación abre la posibilidad de continuar el estudio a nivel doctoral con posibilidades concluyentes y abriendo los espacios en el currículo del estudio de fractales en la básica de bachillerato.

La presente investigación puede extenderse a Geogebra 3D para el estudio de la pirámide de Sierpinski y otros fractales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acta de Conferencia Latinoamericana de Geogebra. (2012). *Frisos: una nueva mirada a la evaluación.* Uruguay: s.n.

Area, M. (2007). Algunos principios para el desarrollo de buenas prácticas pedagógicas con las Tics en el aula. *Comunicación y Pedagogía: Nuevas Tecnologías y Recursos Didácticos*, (222), 42-47.

Argote, J. I. (2004). *Blog mundo fractal*. Recuperado de http://www.asociacionceat.org/aw/2/sierpinski.htm

Assum, D., Guil, D. y Malet, O. (2014). *El uso de geoGebra en las aulas del Curso de Ingreso a la Universidad: los porqués de una elección*. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. ISBN: 978-84-7666-210-6.

Belén Martin, N. (2015). *Diseño e implementación de una actividad de estudio e investigación a partir de la pregunta ¿Cómo se construye un fractal teórico? Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología NIECyT*

Departamento de Formación Docente. Tesis (Licenciado en Educación Matemática). Facultad de Ciencias Exactas Universidad Nacional de Centro de la Provincia de Buenos Aires UNCPBA. Argentina.

Benoit B., M. (1977). *The fractal geometry of nature*. San Francisco: W.H. Freeman and Co.

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa.* Madrid: La Muralla.

Bonilla Guachamín, G. E. (2013). *Influencia del uso del programa Geogebra en el rendimiento académico en geometría analítica plana, de los estudiantes del tercer año de bachillerato, especialidad físico matemático, del colegio Marco Salas Yépez de la ciudad de Quito, en el año lectivo 2012-2013.* Tesis (Licenciado en Ciencias de la Educación). Nombre de la Universidad, Licenciatura en Ciencias de la Educación, Mención Matemática y Física, Carrera de Matemática y Física, Quito, Ecuador.

Caballero, S. (2013). *Cómo enseñar utilizando las redes sociales*. México: Alfaomega.

Cardeño, J. (2003). *interpretación geométrica de algunos modelos aritméticos*. Medellín: Aires Litográfico.

Carranza Rodríguez, M. A. (2011). *Exploración del impacto producido por la integración del Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) geogebra en la enseñanza de los cursos de matemáticas básicas de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia sede Palmira*. Tesis (Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Facultad de Ingeniería y Administración, Maestría de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Palmira, Colombia.

Castelblanco, K. (2015). *Álgebra de las dimensiones fractales*. Tesis (Licenciada en Matemáticas). Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas. Bogotá, Colombia.

Castellanos Espinal, I. M. (2010). *Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas con alumnos de II de magisterio de la E.N.M.P.N.* Tesis (Magíster en Matemáticas Educativa). Maestría en Matemáticas Educativas, Tegucigalpa, Honduras.

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la Lectoescritura. *Revista Latinoamericana de Investigación* Educativa, *11*(2), 171-194.

Ciappina, D. (2016). *B03 análisis de un recurso para estudiar geometría usando geogebra en la formación de docentes.* La Pampa Argentina: VI REPEM – Memorias.

Colombia. Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias de matemáticas*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Corral, Y. (2009). Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos. Ciencias de la Educación Segunda Etapa, 19(33), 229-247.

Dartmouth Computer Science, Cormen, T. y Balkcom, Devin con el equipo de contenidos de computación de Khan Academy. (2017). *Licencia CC-BY-NC-SA. El triángulo de Sierpinski* Recuperado de https://es.khanacademy.org/computing/computer-science/algorithms/recursive-algorithms/a/the-sierpinksi-gasket

Dávila Araiza, M. T. (2010). *La Derivada a Partir de Problemas de Optimización en Ambientes Dinámicos Creados con GeoGebra*. Tesis (Magíster en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa). Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora División de Ciencias Exactas y Naturales, Hermosillo, Sonora, México.

Daza López, L. F. (2012). *Interpretación de la factorización a través del uso del geogebra*. Tesis (Licenciado en Educación Básica con énfasis en

Matemáticas). Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, Medellín, Colombia.

De Guzmán, M. (2006). *Aventuras matemáticas*. Madrid: Pirámide.

Echeverry Páez, A. F. (2013). *Influencia del uso de Cabri Geometry Ii® en el proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos básicos de geometría.* Tesis (Magister en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Manizales, Colombia.

Foro Económico Mundial. (2014). *Ranking mundial sobre el uso de las TIC*. Recuperado de http://colombiadigital.net/actualidad/noticias/item/6953-ranking-mundial-sobre-el-uso-de-las-tic.html

García, M. del M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula.* Tesis (Doctorado en Investigación Didáctica). Universidad de Almería, Doctorado en Investigación Didáctica, Almería, España.

Geogebra. (s.f.). *Construcción de fractales. Triángulo de Sierpinski.* Recuperado de https://www.geogebra.org/m/DGMV8xmp

Geogebra. (s.f.). *Página oficial.* Recuperado de https://www.geogebra.org/download

Giacinti, F. (2012). *Utilidad de los fractales*. Recuperado de http://lamatematicarecreativa.blogspot.com.co/2012/06/los-fractales.html

Godino J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática* Madrid: Ministerio de Ciencia e Innovación.

Guisbert, M. (2002). *El nuevo rol del profesor en entornos tecnológicos*. *Acción Pedagógica, 11*(1), 48-59

Gutiérrez Esteban, P., Yuste Tosina, R., Cubo Delgado, S., Lucero Fustes, M. (2011). Buenas prácticas en el desarrollo de trabajo colaborativo en materias TIC aplicadas a la educación. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 15*(1), 179-194.

Helsel, S. D. (2008). *The influence of technology on adolescent development: an eco-cultural analysis of cybersocial activity.* Proquest, (7), 1-5.

Hernández R., Fernández, C. y Baptista, P. (2008). *Metodología de la investigación.* Asunción: Mc Graw Hill.

Hinojosa Rivera, M. (1996). *Aplicación de geometria de fractales a la descripcion de microestrucuras metalicas.* Tesis (Doctor en Ingeniería). Universidad

Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingenieria Mecánica y Eléctrica, Division Estudios de Posgrado, Doctorado en Ingenieria de Materiales, Nuevo León, México.

Hohenwarter, M. (2001a). *Un software matemático multi-plataforma que nos ofrece la oportunidad de experimentar las extraordinarias percepciones que las matemáticas posibilitan*. Recuperado de https://www.geogebra.org/

Hohenwarter, M. (2001b). *Geogebra online*. Recuperado de https://archive.geogebra.org/en/upload/files/GG_support/Hohenwarter-HW-Lavicza-IJTME.pdf

Hohenwarter, M. y Lavicza, Z. (2010). *Evaluating Difficulty Levels of Dynamic Geometry Software Tools to Enhance Teachers' Professional Development.* Cambridge: University of Cambridge.

Ipsos. (2013). *Estadísticas uso de internet Colombia*. Recuperado de http://sebastianbehar.com/2013/02/19/estadisticas-de-uso-de-internet-en-colombia/

López Lozano, O. G. (2013). *Transformaciones de funciones con geoGebra y moodle como mediadores didácticos*. Tesis (Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional, Maestría en

Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Facultad de Ciencias, Medellín, Colombia.

Losada Liste, R. (2007). Geogebra de la intuición Rafael Losada Liste*. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 10*(1), 223-240.

Maldonado Rodríguez, L. (2013). *Enseñanza de las simetrías con uso de geogebra según el modelo de Van Hiele.* Tesis (Magíster en Educación). Maestría en Educación Mención Informática Educativa, Departamento de Educación, Escuela de Postrados, Santiago, Chile.

Mandelbrot B. B. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona: Tusquets.

Mandelbrot, B. B. (1975). *La geometría fractal de la naturaleza*. New York: Springer.

Mandelbrot, B. B. (1982). *The fractal geometry of nature.* New York: W. H. Freeman and Company.

Mandelbrot, B. B. (1997). *Fractals and Scaling in Finance.* New York: Springer.

Marqués, P. (2011). *El software educativo.* Recuperado de http://www.lmi.ub.es/te/any96/marques_software/

Martín, N. B. (2015). *Diseño e implementación de una actividad de estudio e investigación a partir de la pregunta ¿Cómo se construye un fractal teórico? Tesis* (Licenciado en Educación Matemática). Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1768/

Martínez Gómez, J. N. (2013). *Apropiación del concepto de función usando el software Geogebra*. Tesis (Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Universidad Nacional de Colombia, Manizales.

Monahan, K. D. (1999). *Influence of Technology on Adolescent Development and Spiritual Formation.* Tesis (Doctor of Ministry). Liberty University, Palm Beach, FL. Usa.

Montenegro, A. (2002). *Matemáticas para el nuevo Icfes*. Cali: Los Tres Editores.

Morales-Morgado, E. M., García-Peñalvo, F. J., Campos, R. y Astroza, C. (2012). Desarrollo de competencias a través de objetos de aprendizaje. *RED. Revista de Educación a Distancia*, 5-19.

Pedraza, P., Mora Monje, A., Lopera, C., Patiño, M. I., Castillo, M., Naranjo, N. y Malagón, A. (2013). *Guía del MEN PRUEBAS SABER 3°, 5° y 9° Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal 2013*. Recuperado de http://cms.univalle.edu.co/todosaaprender/anexos/enelcamino/6-ICFES_MEN-Pruebassaber359.pdf

Pérez Porto, J. y Gardey, A. (2012). *Definición de fractal.* Recuperado de http://www.definicionabc.com/ciencia/fractal.php

Ramírez Arroyave, G. A. (2009). *Diseño de una antena multibanda basada en fractales para redes móviles inalámbricas de banda ancha en las frecuencias de 0.9, 2.4 y 3.5 GHz,* Tesis (Magíster en Ingeniería de Telecomunicaciones). Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá, Facultad de Ingeniería Departamento de Ingeniería de Sistemas e Industrial Bogotá, Colombia.

Reyes, M. (1999). Una introducción a la geometría fractal y su aplicación a la compresión de imágenes. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, (52), 32-55. Recuperado de https://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionMadrid2009/fractales.pdf

Ríos Londoño, F. A. y Yáñez Figueroa, J. A. (2016). *Las competencias tic y su relación con las habilidades para la solución de problemas de matemáticas*. *Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, (57), 18-22.

Rivera Henao, E. y López Varona, R. (2012). Evidencia de propiedades fractales en la sucesión de Fibonacci usando wavelets. *Scientia et Technica*, *XVII,* (52), 122 -128.

Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J. y García Jiménez, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Granada: Aljibe.

Román, M. & Murillo, F. (2014). Disponibilidad y uso de TIC en escuelas latinoamericanas: incidencia en el rendimiento escolar. *Educação e Pesquisa, 40*(4), 869-895.

Sabogal, S. y Arenas, G. (2008). Una introducción a la geometría fractal. Recuperado de http://matematicas.uis.edu.co/libros/l_geofrac.pdf

Samper, J. (2014). *Las pruebas PISA: ¿cómo mejorar los resultados?* Recuperado de http://www.razonpublica.com/index.php/econom-y-sociedad-temas-29/7571-las-pruebas-pisa-%C2%BFc%C3%B3mo-mejorar-los-resultados.html

Scharager J y Armijo, I. (2001). *Metodología de la investigación para las ciencias sociales.* Versión 1.0 Santiago: Escuela de Psicología, SECICO Pontificia Universidad Católica de Chile.

Segura, J. (2013). 3D *Estereoscópico. Estudio de los fundamentos y metodología de visionado, grabación y edición de la tecnología estereoscópica actual, y elaboración de un cortometraje aplicando dichos conocimientos*. Tesis (Ingeniero Técnico de Telecomunicaciones). Universidad Pública de Navarra, Ingeniería Técnica de Telecomunicaciones – Especialidad Sonido e Imagen, Navarra, España.

Sierra Bravo, R. (2001). *Técnicas de investigación social*. Medellín: Paraninfo.

Social Sciencia Statistics. (s.f.). *Wilcoxon signed-rank test calculator*. Recuperado de http://www.socscistatistics.com/tests/signedranks/default2.aspx

Sordo, J. M. (2005). *Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría.* Tesis (Doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España. Recuperado de http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucmt28911.pdf

TallerGeoGebra. (2011). *GeoGebra: herramienta "homotecia desde un punto por un factor de escala".* Recuperado de https://www.youtube.com/ watch?v=o4GfAwIL8c0

Vara-Horna, A. (2012). *7 pasos para una tesis exitosa*. Lima: Facultad de Ciencias Administrativas.

Vega Vega, J. C. (2014). C*oncepciones en torno al infinito actual: análisis mediado por el software cabri geometre.* Tesis (Magíster en Educación). Universidad Militar Nueva Granada, Facultad de Educación y Humanidades, Maestría en Educación, Bogotá, Colombia.

Zuluaga, O. L. (1992-1993). El Orbis Pictus. *Educación y Pedagogía*, (8-9), 176-193.

ANEXOS

ANEXO 1. MATRIZ DE CONSISTENCIA

TÍTULO: USO DE LA HERRAMIENTA GEOGEBRA Y SU INFLUENCIA EN LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI EN ESTUDIANTES DE 8° DEL INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL PASCUAL BRAVO, MEDELLÍN 2016

AUTORAS: DIANA ALEJANDRA GIRALDO DUQUE Y LINA JANETH CANO LOPERA

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES E INDICADORES
Problema General ¿En qué medida el uso de la herramienta GeoGebra influye en la comprensión de la construcción del triángulo de Sierpinski en estudiantes de 8° grado del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín 2016? **Problemas específicos** ¿En qué medida el uso de la herramienta GeoGebra influye en la comprensión de la construcción de las características de autosimilitud del triángulo de Sierpinski en estudiantes de 8° grado del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín 2016? ¿En qué medida el uso de la herramienta Geogebra influye en la comprensión de la construcción de las características del perímetro infinito y del área cero del triángulo de Sierpinski en	**Objetivo General** Determinar en qué medida el uso de la herramienta GeoGebra influye en la comprensión de la construcción del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° del instituto Técnico Industrial Pascual bravo, Medellín, 2016. **Objetivos específicos** Determinar en qué medida el uso de la herramienta GeoGebra influye en la comprensión de las características de autosimilitud del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° del instituto Técnico Industrial Pascual bravo, Medellín, 2016. Determinar en qué medida el uso de la herramienta GeoGebra influye en la comprensión de las características de perímetro infinito y área cero del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° del	**Hipótesis general:** El uso de la herramienta Geogebra influye significativamente en la comprensión de la construcción del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016. **Hipótesis alterna:** El uso de la herramienta Geogebra influye significativamente en la comprensión de la construcción del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016. **Hipótesis Nula h(o)**	Variable Independiente: Herramienta GeoGebra

VARIABLE INDEPENDIENTE	DIMENSIONES	INDICADORES
GeoGebra (X)	1. Vista gráfica (X1)	Construcción con comando punto medio
		Construcción con comando homotecias
		Construcción con comando deslizador(encadena, secuencia, elementos)
	2. Vista algebraica (X2)	Objetos Libres
		Objetos Dependientes
		Objetos Auxiliares
	3. Hoja de cálculo (X3)	Ingreso de datos manual
		arrastre para tabulación de datos

<table>
<tr>
<td>estudiantes de 8° grado del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín 2016?

¿En qué medida el uso de la herramienta Geogebra influye en la comprensión de la construcción de las características de la dimensión fractal triángulo de Sierpinski en estudiantes de 8° grado del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín 2016?</td>
<td>instituto Técnico Industrial Pascual bravo, Medellín, 2016.

Determinar en qué medida el uso de la herramienta Geogebra influye en la comprensión de las características de dimensión fractal del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° del instituto Técnico Industrial Pascual bravo, Medellín, 2016.</td>
<td>El uso de la herramienta Geogebra no influye significativamente en la comprensión de la construcción del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.

Sub Hipótesis especificas

H1: El uso de la herramienta Geogebra influye significativamente en la comprensión de las características de auto similitud del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.

H2: El uso de la herramienta Geogebra influye significativamente en la comprensión de las características de perímetro infinito y área cero del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.

H3: El uso de la herramienta Geogebra influye significativamente en la comprensión de las características de</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td>Vincular datos de la vista algebraica</td></tr>
</table>

Variable Dependiente

<table>
<tr><th>VARIABLE</th><th>DIMENSIONES</th><th>INDICADORES</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Triángulo de Sierpinski (Y)</td><td rowspan="3">Comprensión de la característica de la Autosimilitud (Y1)</td><td>Clasificación de triángulos.</td></tr>
<tr><td>Congruencia de triángulos</td></tr>
<tr><td>Semejanza de triángulos</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2. Comprensión de la característica de área cero y perímetro infinito (Y2)</td><td>Perímetro y área euclidiana</td></tr>
<tr><td>Perímetro infinito</td></tr>
<tr><td>Área cero</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3. Comprensión de la característica de dimensión fractal (Y3)</td><td>Dimensión topográfica</td></tr>
<tr><td>Dimensión fractal</td></tr>
<tr><td>Fórmula de la dimensión fractal</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

		dimensión fractal del triángulo de Sierpinski en estudiantes del grado 8° de del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín, 2016.	

MÉTODO Y DISEÑO	POBLACIÓN	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS	**MÉTODO DE ANÁLISIS DE DATOS**
Diseño de investigación: y **Método de estudio:**	Población: 40 estudiantes del grado 8° del Pascual Bravo de Medellín <table><tr><td colspan="2"></td></tr><tr><td>Hombres</td><td>Mujeres</td></tr><tr><td>29</td><td>11</td></tr></table> Fuente: programa académico institucional Total muestra: 40	Las técnicas e instrumentos de recolección de datos utilizados en la investigación son las siguientes: Técnica: Instrumentos: pre-test y post-test	El método de la presente tesis de investigación es: • Codificación • Calificación • Tabulación • Interpretación

ANEXO 2. TEST

OBJETIVO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN: determinar en qué medida el uso de la herramienta GeoGebra influye en comprensión de las características de la construcción del triángulo de Sierpinski en estudiantes de 8° del instituto técnico industrial pascual bravo, Medellín 2016.

OBJETIVOS ESPECIFICOS DE LA PRUEBA:

Determinar en qué medida el uso de la herramienta GeoGebra influye en comprensión de las característica la auto similitud del triángulo de Sierpinski en los estudiantes de los grados 8° del Tecnológico Pascual Bravo, Medellín - Colombia 2016

Determinar en qué medida el uso de la herramienta GeoGebra influye en comprensión de las características de del área cero y del perímetro infinito del triángulo de Sierpinski en los estudiantes de los grados 8° del Tecnológico Pascual Bravo, Medellín - Colombia 2016

Determinar en qué medida el uso de la herramienta GeoGebra influye en comprensión de las característica de la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski en los estudiantes de los grados 8° del Tecnológico Pascual Bravo, Medellín - Colombia 2016

La prueba recoge:

1. Datos generales: que pretende recoger los datos básicos de los estudiantes para la tabulación de los mismos.
2. Preguntas orientadas a identificar la comprensión de la característica de auto similitud del triángulo de Sierpinski
3. Preguntas orientadas a identificar la comprensión de la característica del área cero y del perímetro infinito del triángulo de Sierpinski
4. Preguntas orientadas a identificar la comprensión de la característica de la dimensión fractal

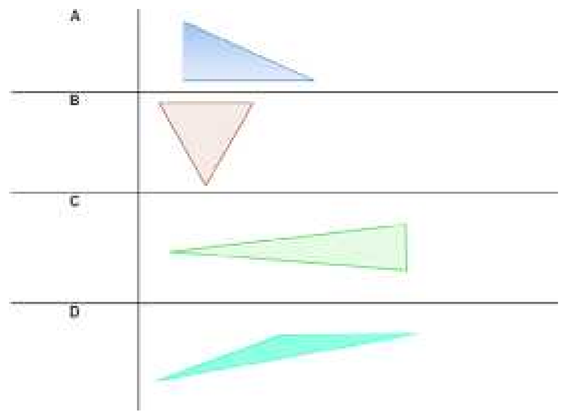
del triángulo de Sierpinski.

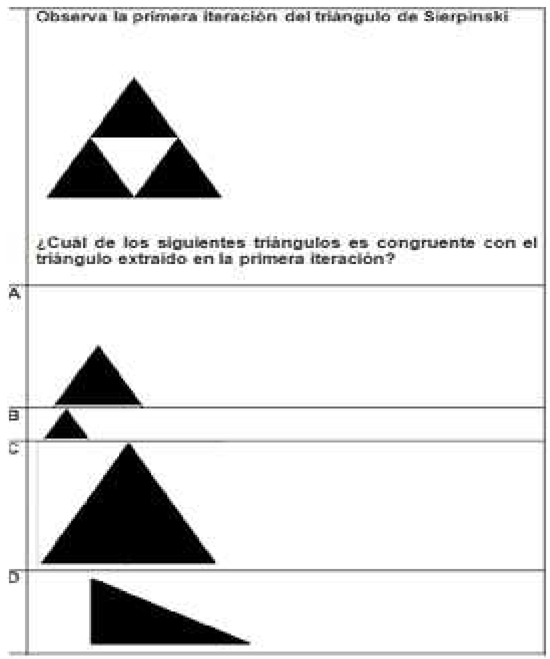
Antes de utilizar la herramienta Geogebra, los estudiantes realizan manualmente la construcción del triángulo de Sierpinski con papel y responden las siguientes preguntas:

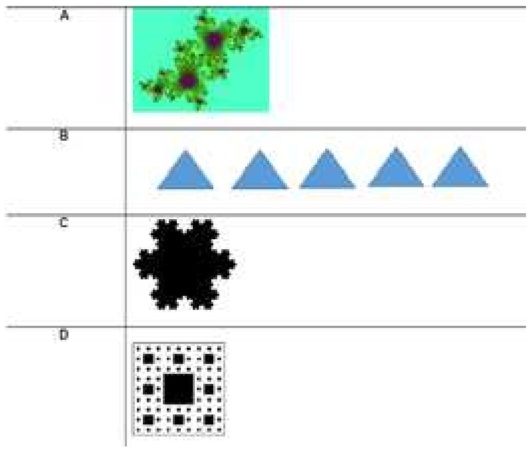
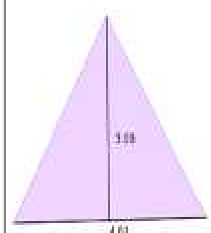
I. Datos generales

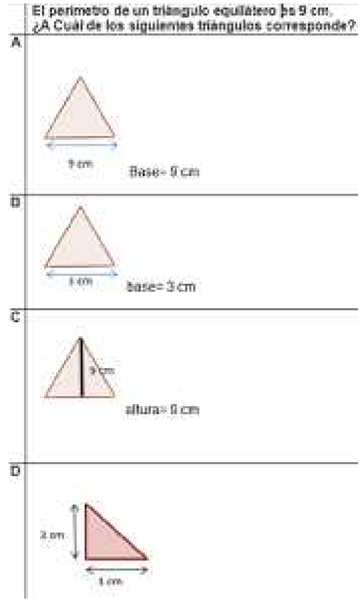
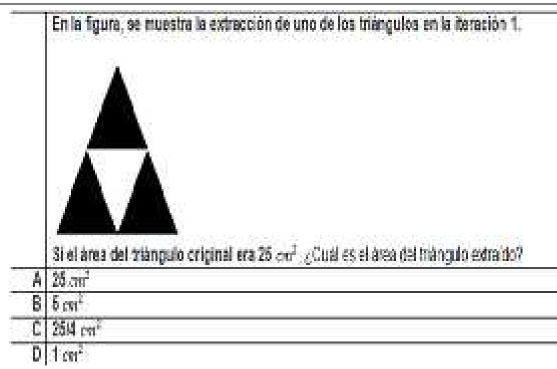
1. Nombres:	
2. Apellidos:	
3. Grado Y grupo	
4. Género:	
5. Edad:	
6. Correo:	
Asignación del código para tabulación:	

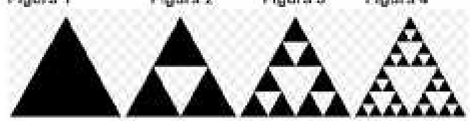
VARIABLE	**DIMENSIONES**	**INDICADORES**	**Pregunta del test**	**Clave correcta**	**valor asignado**	**Estándar asociado**	**Si es correcta, entonces:**

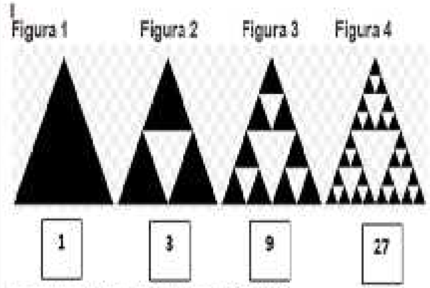
Triángulo de Sierpinski (Y)	Comprensión de la característica de la Autosimilitud (Y_1)	Clasificación de triángulos.	**1, ¿Cuál de los siguientes triángulos es equilátero?** 	**B**	**Correcta=1 Incorrecta=0**	Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.	El estudiante comprende la definición de un triángulo equilátero, del cual parte la construcción del triángulo de Sierpinski.

	Comprensión de la característica de la Autosimilitud (Y_1)	Congruencia de triángulos	**2, Observa la primera iteración del triángulo de Sierpinski, Cuál de los siguientes triángulos es congruente con el triángulo extraído en la primera iteración?** 	A	**Correcta=1 Incorrecta=0**	• Aplico y justifico con criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.	El estudiante comprende la extracción de un triángulo y lo clasifica como congruente a otro. A partir de la definición de triángulo congruente se identifican las extracciones de cada iteración.

	Comprensión de la característica de la Autosimilitud (Y_1)	Semejanza de triángulos	**3, ¿Cuál de las siguientes figuras NO es autosimilar?**  	B	**Correcta=1 Incorrecta=0**	Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.	El estudiante diferencia entre semejanza y auto semejanza.
Triángulo de Sierpinski (Y)		Perímetro y área euclidiana	4 ¿Cuál es el área y el perímetro (en centímetros cuadrados) del triángulo de la figura? La formula del área de un triángulo está dada por $A=\frac{Base \times Altura}{2}$  A 9,195 cm^2 y 13, 83 cm B 18,39 cm^2 y 4,61 cm C 8,6 cm^2 y 3,99 cm D 4,3 cm^2 y 13,83 cm	A	**Correcta=1 Incorrecta=0**	Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.	El estudiante comprende como hallar el perímetro y área de 1 solo triángulo para posteriormente realizar el cálculo del área resultante y perímetro resultante de cada iteración.

	2. Comprensión de la característica de área cero y perímetro infinito (Y_2)	Perímetro infinito	5 	B	**Correcta=1 Incorrecta=0**	• Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre fi guras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.	El estudiante comprende que es perímetro y como deducirlo de un triángulo equilátero
		Área cero	6 	C	**Correcta=1 Incorrecta=0**	Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.	El estudiante comprende que es área y como deducirla de un triángulo equilátero

			7  Si el área del triángulo original era 25 cm^2, ¿Qué sucede con el área total del triángulo en la tercera iteración? ? A Disminuye la cantidad de triángulos extraídos. B Disminuye y tiende a cero C Aumenta en cada iteración D Aumenta el área pero disminuye el número de triángulos extraídos	B	**Correcta=1 Incorrecta=0**	Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.	El estudiante comprende la característica de área cero
		perímetro y área cero	8  ¿Qué dato debería aparecer en la iteración 4 con respecto al perímetro y al área? A En la iteración 4, el área será mayor que en la iteración 3 y el perímetro será menor que en la iteración 3 B En la iteración 4, el área será mayor que en la iteración 3 y el perímetro será igual que en la iteración 3 C En la iteración 4, el área será igual que en la iteración 3 y el perímetro será menor que en la iteración 3 D En la iteración 4, el área será menor que en la iteración 3 y el perímetro será mayor que en la iteración 3	D	**Correcta=1 Incorrecta=0**	Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.	El estudiante comprende que a medida que el área del triángulo de Sierpinski disminuye aumenta el perímetro.

		perímetro y área cero	9 Observa la siguiente secuencia  La secuencia de triángulos es 1,3,9 y 27 Esta secuencia también puede representarse asi A $3^0, 3^1, 3^2, 3^3$ B 1,2,4,8 C $3^1, 3^2, 3^3, 3^4$ D 1+3+9+27	A	**Correcta=1 Incorrecta=0**	Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superfi cies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.	El estudiante comprende las diferentes representaciones numéricas de las extracciones de los triángulos de Sierpinski
		Dimensión topográfica	10 Observa las figuras:  ¿Qué dimensiones le corresponden a cada figura? La figura 1 tiene dimensión 1, la figura 2 tiene dimensión 2 y la figura 3 tiene dimensión 3. B La figura 1 tiene dimensión 2, la figura 2 tiene dimensión 1 y la figura 3 tiene dimensión 3. C La figura 1 tiene dimensión 1, la figura 2 tiene dimensión 3 y la figura 3 tiene dimensión 2. D La figura 1 tiene dimensión 2, la figura 2 tiene dimensión 3 y la figura 3 tiene dimensión 2.	A	**Correcta=1 Incorrecta=0**	Conjeturo y verifi co propiedades de congruencias y semejanzas entre fi guras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.	El estudiante comprende la representación en el plano de las tres dimensiones topográficas.

	3. Comprensión de la característica de dimensión fractal (Y_3)	Dimensión fractal	11 Pregunta N° Se puede hallar la dimensión fractal del Triángulo de Sierpinski al ________ la longitud de los lados, se obtiene otro triángulo de Sierpinski semejante al primero, que contiene a su vez a ____ triángulos de la misma escala que el primero. ¿qué palabras corresponden a los espacios del párrafo anterior? A triplicar y dos B Duplicar y dos C Duplicar y tres D Triplicar y tres	C	**Correcta=1 Incorrecta=0**	Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.	El estudiante debe comprender el origen de la formula de la dimensión fractal
		Fórmula de la dimensión fractal	12 ¿Cuál de las siguientes formulas permite hallar la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski?) $\log 3/\log 2$ $\log 2/\log 3$ $3/\log 2$ $\log 3$	A	**Correcta=1 Incorrecta=0**	Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.	El estudiante comprende la especialidad de la dimensión del triángulo

ANEXO 3. MATRIZ DE OPERACIONALIZACIÓN DE LAS VARIABLES

<table>
<tr><td colspan="2">Variable Dependiente: Triángulo de Sierpinski</td><td colspan="2">Dimensiones</td><td rowspan="2">Indicadores</td></tr>
<tr><td>Definición
Conceptual</td><td>Definición
Operacional</td><td>Definición Conceptual (En base a alguna teoría o libro)</td><td>Definición Operacional (Elaborado por el investigador)</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Triángulo de Sierpinski</td><td rowspan="9">En un triángulo equilátero se marcan los puntos medios de los lados, se unen formando cuatro triángulos iguales y quitamos el triángulo central. En cada uno de los tres nuevos triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente.

A la figura formada se denomina triángulo de Sierpinski…

El proceso que hemos seguido ha sido aplicar tres homotecias de razón 1/2 y centros los tres vértices del triángulo al

triángulo inicial y de forma iterativa a la figura obtenida, de donde el triángulo de Sierpinski es el punto fijo o atractor

del conjunto de aplicaciones contractivas formado por las tres homotecias.</td><td rowspan="3">Dimensión 1: Comprensión de la característica de la Autosimilitud: como la característica que presentan determinados objetos en los cuales los detalles más pequeños que lo componen tienen alguna relación estadística con sus propiedades globales, repitiéndose tales detalles de una manera infinita.</td><td rowspan="3">Dimensión 1: Comprensión de la característica de la Autosimilitud</td><td>1.1 Clasificación de triángulos.</td></tr>
<tr><td>1.2 Congruencia de triángulos</td></tr>
<tr><td>1.3 Semejanza de triángulos</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Dimensión 2: Comprensión de la característica de área cero y perímetro infinito</td><td rowspan="3">Dimensión 2: Comprensión de la característica de área cero y perímetro infinito</td><td>2.1 Perímetro y área euclidiana</td></tr>
<tr><td>2.2 Perímetro infinito</td></tr>
<tr><td>2.3 Área cero</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Dimensión 3: Comprensión de la característica de dimensión fractal</td><td rowspan="3">Dimensión 3: Comprensión de la característica de dimensión fractal</td><td>3.1 Dimensión topográfica</td></tr>
<tr><td>3.2 Dimensión fractal</td></tr>
<tr><td>3.3 Fórmula de la dimensión fractal</td></tr>
</table>

Variable Independiente: Geogebra		Dimensiones		Indicadores
Definición Conceptual	Definición Operacional	Definición Conceptual (En base a alguna teoría o libro)	Definición Operacional (Elaborado por el investigador)	
QUE ES GEOGEBRA	DESDE MI POSTURA COMO HERRAMIENTA	Dimensión 1: Vista gráfica	Dimensión 1: Vista gráfica	1.1 Construcción con comando punto medio
				1.2 Construcción con comando homotecias
				1.3 Construcción con comando deslizador(encadena, secuencia, elementos)
		Dimensión 2: Vista algebraica	Dimensión 2: Vista algebraica	2.1 Objetos Libres ampliar reducir Deslizador
				2.2 Objetos Dependientes
				2.3 Objetos Auxiliares
		Dimensión 3: Hoja de cálculo	Dimensión 3: Hoja de cálculo	3.1 Ingreso de datos manual
				3.2 arrastre para tabulación de datos
				3.3 vincular datos de la vista algebraica

ANEXO 4. MATRIZ DEL INSTRUMENTO PARA LA RECOLECCIÓN DE DATOS

Título de la investigación: USO DE LA HERRAMIENTA GEOGEBRA Y SU INFLUENCIA EN LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI EN ESTUDIANTES DE 8° DEL INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL PASCUAL BRAVO, MEDELLÍN 2016AUTORAS: DIANA ALEJANDRA GIRALDO DUQUE Y LINA JANETH CANO LOPERA

Dimensiones (Aspectos del tratamiento de la variable de trabajo)	Indicadores (Comportamientos o conductas deseables en función de la dimensión)	Peso	Número de Ítems	Ítems o reactivos (Cuestionamientos o Situaciones de Observación de conductas)	Criterio de evaluación Seleccionar uno
Dimensión 1: Autosimilitud	**1.1** Clasificación de triángulos.	34%	3	1. con la herramienta Geogebra, construyen un triángulo equilátero con mayor precisión y	**correcta= 1** **incorrecta=** **0**
	1.2 Congruencia de triángulos			2. Con la herramienta Geogebra identifican los triángulos wils de forma más exacta	
	1.3 Semejanza de triángulos			3. Con la herramienta Geogebra identifican los triángulos semejantes estableciendo relaciones	
Dimensión 2: Perímetro infinito	**2.1** Perímetro	33%	4	4. se logra abarcar mayores cálculos del perímetro	**correcta= 1** **incorrecta=** **0**
	2.2 Formula de la dimensión fractal			5. la dimensión fractal es más fácil calcularla con la vista calculo	
	2.3 Concepto perímetro infinito			6. el perímetro infinito se calcula con Geogebra	

Dimensión 3: área cero	**3.1 Área del triángulo**	33%	3	7. se calcula el área del triángulo de forma efectiva	**correcta= 1** **incorrecta=** **0**
	3.2 Concepto área cero			8. se comprende el concepto de extracción del triángulo	
	3.3Formula de la dimensión fractal			**9. se calcula la dimensión fractal**	
		100%	10		

ANEXO 5. LISTADO DE PARTICIPANTES

Ítem	GÉNERO	FECHA DD/MM/AA	Nº MATRICULA	GRADO
1	Femenino	06/10/2002	140002	08
2	Masculino	10/04/2003	140003	08
3	Femenino	17/08/2002	140005	08
4	Femenino	18/10/1999	120004	08
5	Masculino	29/10/2001	130013	08
6	Femenino	07/08/2001	140013	08
7	Femenino	27/04/2003	140014	08
8	Masculino	16/02/1999	120012	08
9	Masculino	25/10/2002	140015	08
10	Masculino	05/01/2003	140016	08
11	Masculino	30/06/2002	140018	08
12	Femenino	31/03/2003	140020	08
13	Masculino	26/02/2002	150027	08
14	Masculino	20/10/2002	140023	08
15	Femenino	25/06/2002	140024	08
16	Masculino	03/08/2001	130028	08
17	Masculino	21/04/2003	140026	08
18	Masculino	08/02/2002	130029	08
19	Masculino	15/11/2002	140029	08
20	Masculino	30/09/2002	140030	08
21	Masculino	09/02/2000	130031	08
22	Masculino	23/11/2002	140032	08
23	Masculino	13/05/2001	130034	08
24	Masculino	03/05/2001	130035	08
25	Masculino	03/06/2001	130038	08
26	Masculino	23/04/2003	140034	08
27	Femenino	27/11/2002	140035	08

28	Masculino	05/06/2001	130040	08
29	Masculino	31/08/2002	140038	08
30	Masculino	10/01/2003	140040	08
31	Femenino	20/03/2002	130043	08
32	Masculino	14/10/2002	140043	08
33	Femenino	06/01/2003	140045	08
34	Masculino	24/04/2000	130050	08
35	Masculino	12/06/2002	140046	08
36	Masculino	12/06/2002	140047	08
37	Masculino	11/10/2002	160421	08
38	Femenino	31/10/2001	130052	08
39	Masculino	12/06/2002	140049	08
40	Masculino	08/11/2002	140050	08

ANEXO 6. PRUEBA KR-20

Ítem	Nº MATRICULA	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5	Pregunta 6	Pregunta 7	Pregunta 8	Pregunta 9	Pregunta 10	Pregunta 11	Pregunta 12	TOTAL
1	140002	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12
23	130034	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12
25	130038	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11
3	140005	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11
28	130040	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11
30	140040	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11
17	140026	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	10
2	140003	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	10
5	130013	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	10
10	140016	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	10
13	150027	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	10
15	140024	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	10
16	130028	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	10
20	140030	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	10
29	140038	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	10
34	130050	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	10
4	120004	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	9
11	140018	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	9

12	140020	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	9
14	140023	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	9
19	140029	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	9
24	130035	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	9
7	140014	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	8
9	140015	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	8
22	140032	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	8
27	140035	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	8
31	130043	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	8
32	140043	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	8
33	140045	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	8
8	120012	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	7
18	130029	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	7
26	140034	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	7
35	140046	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	7
37	160421	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	7
6	140013	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	6
21	130031	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	6
38	130052	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	6
36	140047	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	5

39	140049	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	3
40	140050	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2

0,9	0,925	0,75	0,725	0,8	0,425	0,45	0,775	0,8	0,875	0,95	0,15
0,1	0,075	0,25	0,275	0,2	0,575	0,55	0,225	0,2	0,125	0,05	0,85
0,09	0,069375	0,1875	0,199375	0,16	0,244375	0,2475	0,174375	0,16	0,109375	0,0475	0,1275

KR(20)=	0,68401464	n	12
		n-1	11
		var	4,87115385

ANEXO 7. WILCOXON

Pre test	Post test	DIFERENCIA	ABSOLUTO	RANGOS	WPOS	W NRG
12	12	0	0			
12	12	0	0			
10	10	0	0			
10	10	0	0			
10	10	0	0			
10	10	0	0			
10	10	0	0			
10	10	0	0			
9	9	0	0			
9	9	0	0			
9	9	0	0			
9	9	0	0			
8	8	0	0			
8	8	0	0			
7	7	0	0			
7	7	0	0			
6	6	0	0			
5	5	0	0			
11	12	-1	1	6,5		6,5
11	12	-1	1	6,5		6,5
11	12	-1	1	6,5		6,5

11	12	-1	1	6,5		6,5
10	11	-1	1	6,5		6,5
10	11	-1	1	6,5		6,5
10	11	-1	1	6,5		6,5
10	11	-1	1	6,5		6,5
7	8	-1	1	6,5		6,5
7	8	-1	1	6,5		6,5
6	7	-1	1	6,5		6,5
6	7	-1	1	6,5		6,5
9	11	-2	2	15		15
9	11	-2	2	15		15
8	10	-2	2	15		15
8	10	-2	2	15		15
8	10	-2	2	15		15
8	11	-3	3	19,5		19,5
7	10	-3	3	19,5		19,5
3	6	-3	3	19,5		19,5
8	5	3	3	19,5	19,5	
2	8	-6	6	22		22
			W	253	19,5	233,5

ANEXO 8. REGISTROS FOTOGRÁFICOS

ANEXO 9. CARTA DE CONSENTIMIENTO

INSTITUTO TECNICO INDUSTRIAL PASCUAL BRAVO

2016

Medellín, Octubre 6 de 2016

Señores Padres de familia

Estudiantes octavo y noveno

Con el fin de fortalecer las competencias matemáticas y tecnológicas de los estudiantes, invitamos a su hijo(a) a realizar un curso de Sobre la herramienta tecnológica Geogebra que será de 8 am a 12 m, del día______________ en las instalaciones del instituto.

Geogebra goza de un reconocimiento a nivel internacional como una herramienta intuitiva y flexible para geometría dinámica y ha causado en los últimos años un cambio significativo en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas de la básica de secundaria.

Por tal motivo solicitamos su autorización:

ANEXO 10. JUICIOS DE EXPERTOS

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN

Quien suscribe Marleny Concepción Castaño Quintero con C.C. 32.392.859 de Cocorná Ant, mediante la presente hago constar que el instrumento utilizado para la recolección de datos de la tesis de grado titulada: "***USO DE LA HERRAMIENTA GEOGEBRA EN LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI EN ESTUDIANTES DE 8° DEL INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL PASCUAL BRAVO, MEDELLÍN 2016***", Presentada por **Lina Janeth Cano Lopera con C.C. 43569430 de Medellín y Diana Alejandra Giraldo Duque con C.C. 42792173 de Medellín**, aspirantes al título de maestría en informática educativa de la Universidad Wiener de Perú, reúne los requisitos suficientes y necesarios para ser considerados válidos y confiables, y por tanto, aptos para ser aplicados para cumplir los objetivos que se plantean en la investigación.

Atentamente,

Magíster en enseñanza de las Ciencias exactas y Naturales.
Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín.

JUICIO DE EXPERTOS

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN

Quien suscribe Maritza Andrea García Angarita con C.C. 60265953 de Pamplona (N.S) mediante la presente hago constar que el instrumento utilizado para la recolección de datos de la tesis de grado titulada: ***"USO DE LA HERRAMIENTA GEOGEBRA EN LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI EN ESTUDIANTES DE 8° DEL INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL PASCUAL BRAVO, MEDELLÍN 2016".*** Presentada por**Lina Janeth Cano Lopera con C.C. 43569430 de Medellín y Diana Alejandra Giraldo Duque con C.C. 42792173 de Medellín** , aspirantes al título de maestría en informática educativa de la Universidad Wiener de Perú, reúne los requisitos suficientes y necesarios para ser considerados válidos y confiables, y por tanto, aptos para ser aplicados para cumplir los objetivos que se plantean en la investigación.

Atentamente,

CC. 60265953

Magister en Software Libre UNAB.
Universidad Autónoma de Bucaramanga

JUICIO DE EXPERTOS

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN

Quien suscribe Carolina Murillo Gaviria

con C.C. 1128264578 de medellín, mediante la presente hago constar que el instrumento utilizado para la recolección de datos de la tesis de grado titulada: ***"USO DE LA HERRAMIENTA GEOGEBRA EN LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI EN ESTUDIANTES DE 8° DEL INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL PASCUAL BRAVO, MEDELLÍN 2016"***, Presentada por **Lina Janeth Cano Lopera con C.C. 43569430 de Medellín y Diana Alejandra Giraldo Duque con C.C. 42792173 de Medellín**, aspirantes al título de maestría en informática educativa de la Universidad Wiener de Perú, reúne los requisitos suficientes y necesarios para ser considerados válidos y confiables, y por tanto, aptos para ser aplicados para cumplir los objetivos que se plantean en la investigación.

Atentamente,

Magister en enseñanza de las Ciencias Naturales y Exactas
Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín